

Über Elektrete aus Naphthalin und die Entstehung ihrer Homoladung*.

Von WOLFGANG BALDUS.

Mit 10 Textabbildungen

(Eingegangen am 18. Dezember 1953.)

Einleitung.

Die beiden einander gegenüber liegenden Oberflächen eines etwa im Felde eines Plattenkondensators formierten Elektreten zeigen bekanntlich nach Abschalten des Feldes und Wegnahme der Kondensatorplatten entgegengesetzte Ladungen. Es wird bei hier, dem allgemeinen Gebrauch folgend, der Einfachheit halber von „Ladungen“ schlechthin gesprochen. Diese setzen sich, wie genauer z. B. in 10.e)örtert wird, aus scheinbaren (Enden von Dipolketten) und wahren Elektrizitätsmengen zusammen. Was gemessen wird, ist die Influenzladung auf einer auf den Elektreten gelegten Metallplatte (siehe 4.). Unmittelbar nach der Herstellung des Elektreten weist die eine Seite, die während der Formierung der Kathode gelegen war („Kathodenseite“), positive Ladung, und die andere Seite, die der Anode angelegen war („Anodenseite“), negative Ladung auf. Man spricht in diesem Fall von Heteroladung. Diese Heteroladung, die nicht nur auf die Oberflächen des Elektreten beschränkt ist, fällt nun auf beiden Seiten etwa innerhalb eines Tages zu Null ab. Daraufhin wächst ohne nochmalige Anwendung eines polarisierenden Feldes die Ladung des Elektreten von dem Nullwert zu entgegengesetztem Sinn wie bei der Heteroladung an, d. h. die Oberfläche, die nach der Herstellung positives Vorzeichen hatte, zeigt nunmehr negatives und umgekehrt. Diese Ladungsverteilung wird Homoladung genannt. Sie wird nach einigen Tagen nahezu konstant und fällt bei Einhaltung gewisser Versuchsbedingungen in Monaten, ja selbst in Jahren, nicht wesentlich ab. (Vgl. [1] und [4].)

Der zusammenfassende Bericht von GUTMANN [3] enthält auch die einander teilweise widersprechenden Aussagen für das Verhalten der Elektrete. Weitgehende Übereinstimmung besteht darüber, daß durch Annahme eines einzigen sich im Dielektrikum spielenden Vorganges die geschilderten Eigenschaften nicht erklärt werden können. So ergaben die Versuche von GROSS [5], [6] sowie von GROSS und ENARD [7], daß entweder eine Wanderung von Dielektrikum vorhandenen entgegengesetzt geladenen Ionen oder eine Dipolausrichtung, bewirkt durch das polarisierende Feld, für die Heteroladung, und unter Umständen ein Übergang von Ladungen im Zwischenraum zwischen Dielektrikum und Elektroden für die Homoladung ausschlaggebend ist. Von THIESSEN, WINKEL und HERRMANN [4] wurde bereits auf die Möglichkeit der Einwanderung von Ladungsträgern aus den Elektroden und ihren bestimmenden Einfluß auf die Homoladung hingewiesen. In theoretischen Betrachtungen hat SWANN [8], [9], [10] insbesondere den Verlauf der Ladungs-Zeit-

Kurve (siehe 7.) durch Annahmen über Polarisations- und Raumladungsverhältnisse im Elektreten behandelt, ohne jedoch näher auf die Herkunft der Ladungen und das Zustandekommen der Polarisation einzugehen.

Häufig wurde im Anschluß an GEMANT [2] die Ansicht vertreten, daß für Elektrete nur Dielektrika

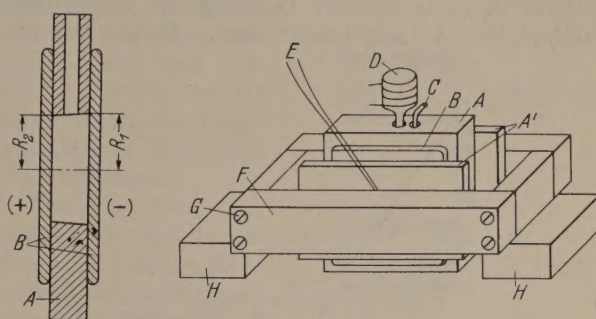


Abb. 1a u. 1b. Versuchsanordnung.

brauchbar sind, die polare Moleküle enthalten (Dipolsubstanzen).

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, diese Aussage zu prüfen und die Verhältnisse im Innern des Elektreten im Hinblick auf das Zustandekommen der Homoladung quantitativ zu erfassen. Es zeigte sich, daß hierfür Messungen an Naphthalin besonders zweckmäßig sind.

1. Apparatur zur Herstellung der Elektrete.

Um für die später (10.) durchzuführende Bestimmung der Feld- und Raumladungsverteilung einfache Bedingungen zu schaffen, wurde die Versuchsanordnung so ausgebildet, daß ein homogenes polarisierendes Feld am Dielektrikum lag. Zu diesem Zweck erhielt eine quadratische Platte A (Dicke 10 mm, Seitenlänge 95 mm) aus hochwertigem Isoliermaterial (technische Bezeichnung Silastic DC 180¹) in der Mitte eine konische Bohrung (Abb. 1a) mit den Radien $R_1 = 17$ mm und $R_2 = 15$ mm; sie war zur Aufnahme des Naphthalins bestimmt, welches in flüssigem Zustand durch eine lotrechte Öffnung eingefüllt werden konnte. Von beiden Seiten wurde je eine quadratische Messingplatte B (Dicke 2 mm, Seitenlänge 70 mm) angedrückt. Die rechte bekam negative hohe Gleichspannung, die linke wurde geerdet. Durch (+) und (—) soll hier und in Abb. 3 und 4 auf das Vorzeichen der bei der Polarisierung verwendeten Elektroden hingewiesen werden. Mittels einer Elektrometerröhre (T 113) wurde der Strom, der während der Formierung das Naphthalin durchfloß, gemessen. Der

¹ Von den Firmen Dr. Alexander Wacker-Werke, München, und Carl Freudenberg, Weinheim a. d. Bergstraße, freundlicherweise kostenlos zur Verfügung gestellt.

* Gekürzte Dissertation 3247 der T. H. München.

„Leerstrom“ durch die Platte *A*, der stets gegenüber dem durch das Naphthalin fließenden Strom klein war, wurde durch gesonderte Versuche in Abhängigkeit von der Temperatur bestimmt und als Korrektur berücksichtigt.

Abb. 1b zeigt den Aufbau der Apparatur schematisch. Ein rechteckiger Rahmen *F* aus Novotex-Hartgewebe hatte derartige Abmessungen, daß bei Anziehen von 4 Schrauben *G* die beiden Messingplatten *B* (in Abb. 1b ist nur eine zu sehen) durch Silasticplatten *A'* fest an *A* angepreßt wurden. Der Rahmen lag auf zwei Glasuntersätzen *H*. Die ganze Anordnung wurde in einen (in Abb. 1b nicht gezeichneten) elektrisch heizbaren Schrank gestellt. Durch ein Gebläse konnte er gekühlt werden, was die Einstellung jeder in Betracht kommenden Temperatur ermöglichte. Die Temperaturmessung geschah mit einem an der Meßstelle geerdeten Thermoelement *E*, dessen eine Lötstelle in einer kleinen Bohrung der erdseitigen Silasticplatte *A'* angebracht war. Seine Anzeige

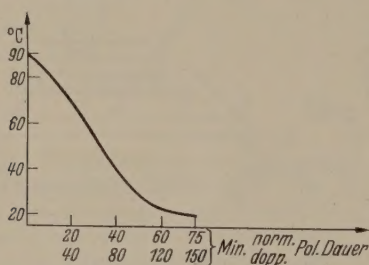


Abb. 2. Temperaturverlauf im Innern des Elektreten während des angelegten polarisierenden Feldes E_P .

wurde in einem ohne Feld angestellten Versuch mit einem in das Dielektrikum eingeführten zweiten Thermoelement verglichen. Alle Temperaturangaben beziehen sich künftig auf das Innere des Elektreten.

In kaltem Zustand wurde das Naphthalin in einen in die lotrechte Bohrung eingeführten Trichter *D* gefüllt. Durch Heizung des Wärmeschrankes kam es zum Schmelzen und lief dann aus dem Trichter in die konische Bohrung (Abb. 1a). Um eine Lunkerbildung während des Abkühlens zu vermeiden, die gerade bei Naphthalin leicht eintritt, wurde mit Hilfe einer zusätzlichen Heizwicklung am Trichter *D* dafür Sorge getragen, daß das in ihm verbliebene überschüssige Naphthalin stets eine höhere Temperatur als das in der konischen Bohrung befindliche hatte. Luft trat durch eine zur Trichterbohrung parallele lotrechte Öffnung aus, in die oben ein Glasröhrchen *C* gesteckt wurde. Die auf diese Weise gewonnenen durchaus homogenen Proben konnten wegen der Konizität der Bohrung nach dem Erkalten ohne Beschädigung leicht herausgenommen werden.

2. Festlegung des Temperaturganges während der Polarisierung. Formierungsbedingungen.

Untersuchungen von GOOD und STRANATHAN [11] haben gezeigt, daß bei Wachselektreten die Abkühlzeit von wesentlichem Einfluß auf deren Verhalten ist. Um eine gute Reproduzierbarkeit der Ergebnisse zu gewährleisten, wurde daher bei den vorliegenden Versuchen nicht nur auf die Dauer der Abkühlung geachtet, sondern auch für eine in allen Fällen gleiche Einhaltung des Temperaturganges Sorge getragen. Nach

Einfüllung des Naphthalins in den Trichter *D* der Apparatur (Abb. 1b) und anschließender Heizung des Wärmeschrankes kam das Dielektrikum binnen einer Stunde auf 100° C, also 20° über den Schmelzpunkt. Dann begann die Abkühlung, 20 Minuten später wurde das Naphthalin auf 90°. Bei dieser Temperatur wurde das polarisierende Feld angelegt. Es sei im folgenden mit E_P bezeichnet. Den Verlauf der gewählten Abkühlungskurve zeigt Abb. 2. Die maximalen Abweichungen von diesem lagen stets unter 1°. Nach Erreichen einer Temperatur von 20° wurde E_P abgeschaltet. Bei den meisten Versuchen betrug die Polarisierungsdauer 75 Minuten; bei anderen Proben jedoch wurde bei angelegtem E_P halb so rasch, aber unter demselben Temperaturgang, abgekühlt (siehe Abszisse von Abb. 2). Kurven, die für Proben gelten, welche innerhalb von 75 Minuten formiert wurden, enthalten entweder keinen diesbezüglichen Hinweis oder die Anmerkung „normale Polarisierungsdauer“, während die anderen Fälle durch „doppelte Polarisierungsdauer“ gekennzeichnet sind.

Nach Abschalten des Feldes E_P wurden bei beiden Platten *B* (Abb. 1a) 10 Minuten lang kurzgeschlossen. Damit sollte eine Überdeckung der Elektreteigenschaften durch die Rückstandserscheinungen, wie sie auch bei gewöhnlichen Kondensatoren auftreten und die bei Kurzschluß im allgemeinen nach einigen Minuten verschwinden, vermieden werden. Sodann wurden die Proben nach Entfernung der Platten *B* aus der konischen Bohrung genommen, zum ersten Mal auf ihre Ladung geprüft (4.) und hierauf in zylindrische geschlossenen Blechkapseln von 11 mm Höhe aufbewahrt.

3. Elektrodenmaterialien. Bestimmung der anzulegenden Spannung.

Dem Elektrodenmaterial kommt maßgebende Bedeutung für die dielektrischen Eigenschaften der Elektrete zu, wie sich zeigen wird. Es fanden metallische und nichtmetallische Elektroden Verwendung. In diesem ist ein Vergleich der gewonnenen Ergebnisse nur dann berechtigt, wenn bei allen Versuchen an demselben Dielektrikum während des ganzen Formierungsprozesses immer dieselbe Feldstärke E_P liegt, unabhängig davon, welches Elektrodenmaterial an die Elektretsubstanz grenzt. Es wurde durchweg $E_P = 11500$ V/cm gemacht, weil dann stets Homoladung auftritt, wenn man dies nicht durch besondere Maßnahmen unterdrückt (siehe 9.). Im Fall metallischer Elektroden ist die polarisierende Feldstärke durch $E_P = V/2l$ gegeben¹, wenn *V* die angelegte Hochspannung und *2l* (≈ 1 cm) die Dicke des Elektreten bedeutet. Bei Verwendung nichtmetallischer Elektroden ist diese Beziehung zu modifizieren.

Als Beispiel hierfür werde das auf der Kathodenseite mit einer (2,2 mm starken) Glasplatte und auf der Anodenseite mit einer Metallplatte bedeckte Dielektrikum betrachtet. Damit im Elektreten wieder dieselbe Feldstärke $E_P = 11500$ V/cm wie in dem Falle beiderseits anliegender metallischer Elektroden herrscht

¹ Randstörungen des Plattenkondensators kommen nicht zur Geltung, da, wie aus Abb. 1a ersichtlich, die Metallplatten auf allen Seiten weit über das Dielektrikum hinübergeragen. Übrigens liegt die Dielektrizitätskonstante der Silasticplatte in derselben Größenordnung wie die des verwendeten Naphthalins.

Daß man jetzt eine höhere Spannung $V' > V$ anlegen. Sie könnte, wenn es sich um ein rein elektrostatisches Problem handelte, leicht wie bei einem Leichten-Plattenkondensator berechnet werden. Wirklichkeit fließt aber während der Polarisierung durch das Dielektrikum ein wenn auch geringer Strom, der temperaturabhängig ist, wie ausführlich noch in 6. Abschnitt behandelt werden wird. Dies schließt eine theoretische Berechnung der anzulegenden Spannung V' aus, zu der die Größe des Widerstandes der Glasplatte schwer zugeben ist. Auf experimentellem Weg kommt man aber dadurch zum Ziel, daß man zum Zweck einer Ladung zwischen Glas- und Silasticplatte ein dünnes Kupferblech (Dicke etwa 0,1 mm) legt (Abb. 3), in welches in der Mitte ein kreisrundes Loch (Radius etwa 12 mm) eingeschnitten ist. Die von außen der oberen Metallplatte zugeführte Hochspannung wird nun so lange, auf V' , erhöht, bis ein zwischen Kupferblech und untere Metallplatte geschaltetes Elektret die gewünschte Spannung von $V = 11500$ Volt ergibt.

Diese Eichung wurde nun bei mehreren der nach Abb. 2 in Betracht kommenden Temperaturen durchgeführt. In entsprechender Weise geschah die Bestimmung von V' auch für beiderseitig am Dielektrikum anliegende Glasplatten.

Abb. 3. Erforderliche Spannung im Fall einer dem Dielektrikum anliegenden nichtmetallischen Elektrode.

Bei den Versuchen, in denen dem Dielektrikum metallische Elektroden anliegen sollten, wurden deren dem Dielektrikum zugekehrten Seiten mit einer Aluminiumfolie von 0,02 mm Dicke bedeckt, welche nach Beendigung des Polarisierungsvorganges leicht abgezogen werden konnte. Wurden Glasplatten verwendet, so erhielten sie eine 0,05 mm starke Isolierschicht mit der technischen Bezeichnung „Supranyl“. Wirksame Elektrodenmaterialien waren also entweder Aluminium oder Supranyl. Um bei den Meßkurven anzugeben, unter welchen Elektrodenbedingungen der jeweilige Elektret hergestellt wurde, sind den späteren Abb. 5a, 5b, 6 die Bezeichnungen (α) , (β) , (γ) , (δ) beigelegt (s. a. 10.); ihre Bedeutung kann man aus Abb. 4 entnehmen.

4. Ladungsmessung.

Es wurde das übliche Verfahren (siehe z. B. [3]) angewendet, nämlich die elektrometrische Messung der Flächenladungsdichte σ , welche auf einer auf die Elektrodenfläche des Elektreten gelegten Metallplatte abgelesen wurde. Es ist nicht gesagt, daß auf der oberen Oberfläche des Elektreten ebenfalls die Ladung $|\sigma|$ sitzt. Es wird vielmehr später (Abb. 9) gezeigt werden, daß wahre Ladungen, z. B. Ionen, im Innern des Elektreten eindringen und deren Beitrag zu σ wird ja ebenfalls gemessen. Allerdings kommt man für einen ungefähren Überblick mit der Annahme aus, daß die Ladung in den obersten Schichten des Elektreten entgegengesetzt gleich der auf der Metallplatte beeinflussten ist. Aus diesem Grund wird zur Kennzeichnung in Hetero- und Homoladung in den Abb. 6, 7 $\sigma = \sigma^*$ nach oben als Ordinate aufgetragen, was übrigens auch der allgemeinen Gepflogenheit entspricht. Dabei ist also σ^* ein qualitatives Maß für die Ladung in den obersten Schichten des Elektreten.

5. Die Gründe für die Verwendung von Naphthalin. Materialeigenschaften.

Sehr große permanente Ladungen (etwa bis zu 6 el. stat. Ld. Einh./cm²) weisen Elektrete aus verschiedenen Naturwachsen und -harzen, vor allem aus Carnaubawachs auf. Diese Substanzen haben überdies den Vorzug, in einem versuchstechnisch günstigen Bereich zu schmelzen (60° bis 90° C). Ferner zeichnen sie sich durch einen hohen spezifischen Widerstand (Größenordnung 10¹³ bis 10¹⁶ Ω cm) aus. Hieraus erklärt sich ihre nahezu ausschließliche Verwendung in den bisherigen Arbeiten. Aber die durch die Art der technischen Gewinnung bedingte uneinheitliche und häufig unkontrollierbare chemische Zusammensetzung bereitet Schwierigkeiten hinsichtlich der Reproduzierbarkeit der Messungen. Synthetische Wachse, wie sie von VAN CALKER und ARNOLD [12], [13] benützt werden, sind den Naturprodukten in dieser Hinsicht überlegen.

Um die Frage zu prüfen, ob nur Dipolsubstanzen für die Elektretbildung in Betracht kommen, wurden einige dipolfreie Stoffe auf ihre Eignung untersucht.

Dabei zeigte sich, daß insbesondere Naphthalin, welches wegen seines symmetrischen Molekelaufbaues das Dipolmoment Null besitzt, durch-

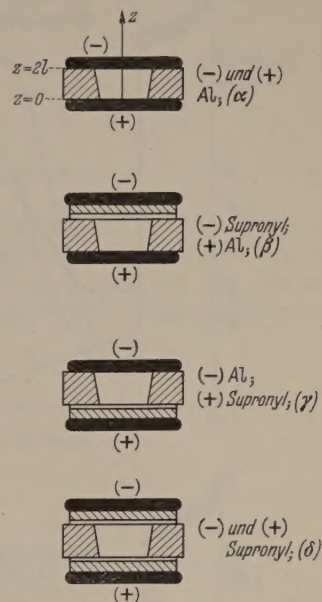


Abb. 4. Kennzeichnung der während der Herstellung der Elektrete wirkenden Elektrodenarten.

aus die kennzeichnenden Eigenheiten eines Elektreten aufweist.

Überdies bietet die Verwendung von Naphthalin eine Reihe weiterer Vorteile, wie einfachen chemischen Aufbau, bekannte Materialeigenschaften, gute Reproduzierbarkeit der Ergebnisse. Diesen günstigen Umständen steht einschränkend gegenüber, daß die bei Naphthalin-Elektreten sich ergebenden Ladungen etwa nur halb so groß wie bei Wachs-Elektreten sind. Dem kommt jedoch im Vergleich mit den soeben angeführten Vorzügen keine entscheidende Bedeutung zu. Deshalb wurden die endgültigen Messungen mit reinstem Naphthalin angestellt.

Der Schmelzpunkt des Naphthalins liegt nach [14] bei 80,1° C, gemäß [15] ist seine Dielektrizitätskonstante (für die feste Substanz) $\epsilon = 2,7$, sein Molekulargewicht $M = 128,16$ und seine Dichte (bei 22° C) $\delta = 1,168$ g/cm³. Nach [16] beträgt die spezifische Leitfähigkeit bei 81,8° C, also für flüssiges Naphthalin, $4,4 \cdot 10^{-10} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$, während sich in unserem Falle unter Berücksichtigung eines Stromes von etwa 10^{-6} A bei dieser Temperatur (Abb. 5a, b) und Einführung der geometrischen Abmessungen (l) ein Wert von $1,1 \cdot 10^{-11} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$ ergibt (die Spannung betrug 11 500 Volt (3.)). Dieser hier erhaltene geringere Leitfähigkeitswert spricht einerseits für die Reinheit des verwendeten Materials (Verunreinigungen würden nämlich die Leitfähigkeit erhöhen [16]) und findet an-

dererseits seine Erklärung darin, daß bei hohen Spannungen, wie in unserem Falle, der spezifische Widerstand von Kohlenwasserstoffen zunimmt [17], während der in [16] angegebene Wert von $4,4 \cdot 10^{-10} \Omega^{-1} \text{cm}^{-1}$ mit einer Meßspannung von der Größenordnung 100 Volt gewonnen wurde.

6. Verlauf des während der Polarisierung fließenden Stromes.

Es soll im folgenden vorgeführt werden, daß die Homoladung durch Ladungsträger beiderlei Vorzeichens hervorgerufen wird, die während des Polari-

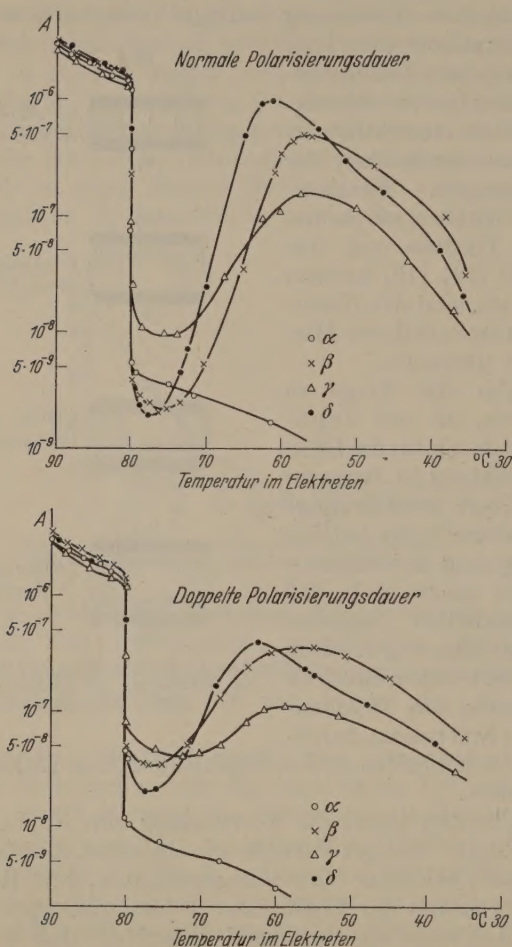


Abb. 5a u. 5b. Während der Polarisierung fließender Strom bei unterschiedlichen Elektrodenmaterialien $\alpha \dots \delta$.

sierungsvorganges in das Dielektrikum einwandern und zwar derart, daß sich die positiven in der Nähe der Anode und die negativen in der Nähe der Kathode ansammeln, wobei sie an diesen Plätzen „einfrieren“. Einen ersten Hinweis dafür kann man aus dem Verlauf des während der Herstellung des Elektretes fließenden Stromes erhalten. Wie man aus Abb. 5a zunächst ersieht, hängen die Kurven unterhalb des Schmelzpunktes ($80,1^\circ$) trotz sonst gleicher Bedingungen stark vom Elektrodenmaterial ab, wobei in den Fällen (β), (γ), (δ) nach einem Minimum bei etwa 75° – 78° noch ein Maximum auftritt. Für den unterschiedlichen Verlauf bietet sich folgende Möglichkeit einer Erklärung.

In Fall (α) (Abb. 4) bildet sich nach Durchlaufen des Schmelzpunktes während anliegender Hochspannung beim Abkühlen eine positive Raumladungswolke in der Nähe der Anode und eine negative in der Nähe

der Kathode aus, welche von den aus den Elektroden stammenden Ladungen gebildet wird und so dicht ist, daß eine weitere Nachlieferung von Ladungen stark eingeschränkt wird, was ein rapides Absinken des Stromes (außerdem noch verursacht durch die Verfestigung) zur Folge hat. Trotz der vorhandenen Feldstärke können wegen der fortschreitenden Abkühlung die Ladungswolken nicht mehr hinreichend abgegeben werden. Im Fall der Kurven (β), (γ), (δ) jedoch sind bedingt durch die anderen Elektrodenmaterialien infolgedessen andere Ladungslieferung, weniger Ladungen an den Elektroden angehäuft. Das an ihnen unmittelbar unter dem Schmelzpunkt vorhandene Gegenfeld kann nun deshalb teilweise zusammenbrechen, was ein nochmaliges Anwachsen des Stromes zu dem Maximum zur Folge hat, wobei die Grenzen dann wiederum durch die geringere Beweglichkeit der noch verbliebenen Ladungen bei tieferen Temperaturen gegeben ist, so daß der Strom schließlich absinkt. Der Abfall geht unterhalb etwa 35° sehr rasch vor sich, so daß er in der logarithmischen Darstellung der Abb. 5a nicht mehr gezeichnet werden kann. Dieser Teil ist aber sowieso ohne Bedeutung.

Trifft die skizzierte Vorstellung zu, so kann man aus dem während der Polarisierung des Elektretes fließenden Strom für die sich später einstellende Homoladung vorhersagen, daß sie, wenn sie durch einwandernde Ladungsträger verursacht wird, für den Fall (α) einen sehr viel höheren Wert als für (β), (γ), (δ) annehmen muß; denn in den letzteren 3 Fällen hat sich ja ein großer Teil der Ladungen nach Durchlaufen des Minimums wieder ausgeglichen. An Hand der späteren Abb. 6 ist zu ersehen, daß dies tatsächlich der Fall ist.

Die Übereinstimmung geht noch weiter, wie man erkennt, wenn man die Fälle (β), (γ), (δ) der Abb. 5a unter sich betrachtet. Je höher das Maximum der Stromkurve, desto mehr Ladungen im Elektret sind wieder abgeflossen. Es wird also für (δ) die kleinste, für (β) eine mittlere und für (γ) die relativ größte maximale Homoladung zu erwarten sein. Auch die Forderungen werden durch die Kurven (δ), (β), (γ) der Abb. 6 erfüllt.

Eine zusätzliche Bestätigung wird erhalten, wenn man den gleichen Temperaturgang halb so rasch durchläuft (Abb. 5b). Weil dann für dasselbe Temperaturintervall doppelt so viel Zeit verfügbar ist, besteht länger die Möglichkeit zum Abbau der Raumladung und das Minimum bei (β), (γ), (δ) liegt infolgedessen nicht mehr so tief wie in Abb. 5a, während die relative Lage der Kurven zueinander erhalten bleibt.

Wie sowohl aus dem großen Sprung der Leitfähigkeit am Schmelzpunkt als auch der Zeitabhängigkeit des fließenden Stromes, ersichtlich aus dem Vergleich der Abb. 5a und 5b, hervorgeht, kommen für die Ladungsträger nicht nur von der Kathode ausgehende Elektronen, sondern auch aus der Anode stammende Ionen in Betracht. Die Möglichkeit der Einwanderung von Ladungsträgern wurde, wie bereits erwähnt, schon von THIESSEN, WINKEL und HERRMANN [4] angegeben, weitere Hinweise finden sich in [18] und [17], wonach Elektroden auch als Lieferanten für Ionen in Betracht kommen können.

Schließlich ist zu betonen, daß eine andere Herkunft der eingefrorenen Ladungen als aus den Elektroden im vorliegenden Fall ausgeschlossen ist, weil Naphthalin nicht in Ionen dissoziiert ist.

7. Zeitabhängigkeit der Hetero- und Homoladung.

Abb. 6 zeigt für die Fälle (α), (β), (γ), (δ), daß auch Elektrete aus dem unpolaren Naphthalin die charakteristische Umkehr von Heteroladung in Homoladung innerhalb eines Zeitraumes von $\frac{1}{2}$ bis 1 Tag aufweisen. Die Darstellung gilt für Messungen an der Kathodenseite des Elektreten, bei der die Heteroladung positives und die Homoladung negatives σ^* ergibt; für die Anodenseite erhält man mit umgekehrtem Vorzeichen (also Heteroladung negatives, Homoladung positives σ^*) qualitativ ähnliche Kurven. Der grundsätzliche Verlauf in den vier Fällen ist stets der gleiche. Die Abweichungen wurden bereits aus dem Verlauf des während der Polarisation fließenden Stromes erschlossen (6.). Die Homoladung erreicht immer nach der Vorzeichenumkehr zunächst einen maximalen Wert, um dann allmählich einer tiefer liegenden Gleichgewichtslage zustreben. Weiterhin zeigt sich, daß der Vorzeichenwechsel bei tieferen Temperaturen erst nach einem längeren Zeitraum eintritt: Wenn man einen Elektreten nicht wie sonst allgemein bei Zimmertemperatur, sondern bei der der flüssigen Luft aufbewahrt, geht die Umladung etwa doppelt so langsam vor sich.

8. Sukzessives Abtragen der Elektretoberfläche.

Um darzulegen, daß es sich bei den eingefrorenen Ladungen nicht um einen Oberflächen-, sondern um einen Volumeneffekt handelt, wurden in Anlehnung an ein bereits von THIESSEN, WINKEL und HERRMANN verwendetes Verfahren mit einem geerdeten Fräser an Elektreten zur Zeit ihrer maximalen Homoladung $\frac{1}{2}$ mm starke Schichten schrittweise abgetragen und zwar stets von der Kathodenseite her. Jedesmal wurde eine Metallplatte auf den Elektreten gelegt und auf ihr influenzierte Flächenladungsdichte σ elektrometrisch gemessen. Um eine Beschädigung des Elektreten beim Vorgang des Abtragens zu vermeiden, wurde er auf eine kleine Kammer gelegt, von der er auf der Unterseite durch Unterdruck angesogen wurde. Die Aufladung durch den geerdeten Fräser findet statt [4]. Macht man die Mittelachse des Elektreten zur z -Richtung (Abb. 4) — die xy -Ebene $z = 0$ liegt mit seiner Unterseite zusammenfallen —, so erhält man den in Abb. 7 angegebenen Verlauf. Er entspricht jedoch aus den in 4. angegebenen Gründen näherungsweise dem Verlauf der Raumladung im Innern des Elektreten, abgesehen vom Vorzeichen. Es ist zu beachten, daß in Abb. 7 σ , d. h. die auf einer angelegten Metallplatte influenzierte Ladung und nicht σ^* (4.) aufgetragen ist. Eine genauere Ermittlung der Raumladungen erfolgt in 10. c).

9. Unterdrückung der Homoladung.

Wenn die Annahme, daß die Homoladung durch ein Einwandern der Ladungsträger verursacht wird, berechtigt ist, sollte man auch ihr Erzeugnis durch Verhinderung dieses Eindringens unter-

binden können. W. MEISSNER [19] hat über einen diesbezüglichen in der Diplomarbeit des Verfassers geschilderten Versuch bereits berichtet. Das dort beschriebene Verfahren ließ sich dadurch verbessern, daß das reine Naphthalin zur Verwendung kam. Die Einwanderung wurde durch je eine beiderseits auf das Dielektrikum aufgelegte Glasplatte unterdrückt, die aber hier nicht wie bei den Proben der Abb. 5a, b (δ), 6 (δ) mit einer Ladungen liefernden Supranylfolie

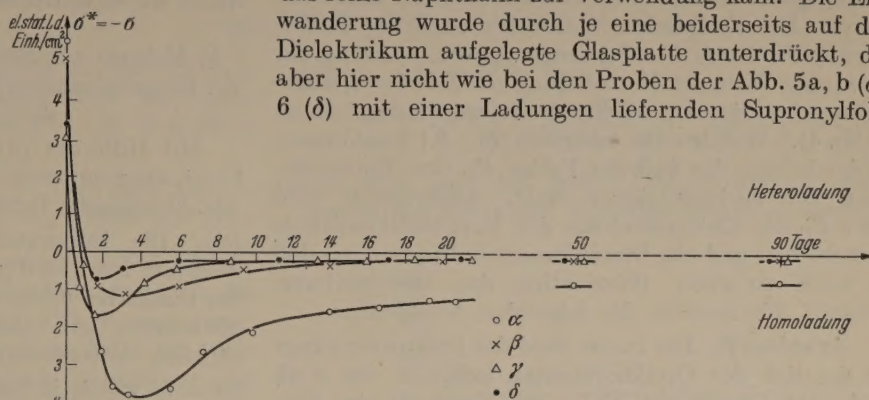


Abb. 6. Zeitabhängigkeit von Hetero- und Homoladung.

bedeckt waren. Das Ergebnis ist in Abb. 8 für die Kathodenseite wiedergegeben. Das hieraus ersichtliche Ausbleiben der Homoladung ist ein weiterer Hinweis auf die ladungsliefernden Eigenschaften des

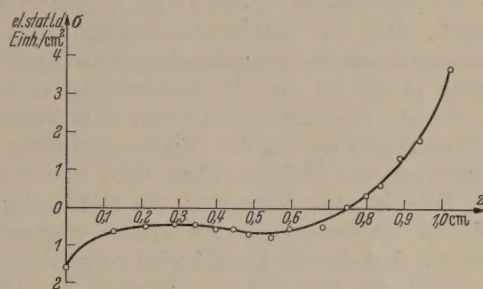


Abb. 7. Sukzessives Abtragen der Elektretoberfläche zur Zeit maximaler Homoladung.

dem Dielektrikum anliegenden Elektrodenmaterials. Man sieht an dem Fall (δ) der Abb. 6, der sich nur durch Verwendung der Supranylfolie von dem eben geschilderten Versuch unterschied, daß diese tatsächlich die wesentliche Rolle spielt.

10. Bestimmung des Feldes und der Raumladungsverteilung im Innern des Elektreten.

Die nunmehr anzustellenden Überlegungen verfolgen den Zweck, eine Möglichkeit zur quantitativen Behandlung der Feld- und Ladungsverhältnisse im Elektreten sowie der Umladungserscheinungen aufzuzeigen. Dabei wird von Grundannahmen ausgegangen, die durch die beschriebenen Experimente nahegelegt werden und die sich auf verschiedene Weise kontrollieren lassen. Alle folgenden Betrachtungen gelten für den Fall (α) (Abb. 4), d. h. für Proben, bei deren Herstellung beiderseits metallische Elektroden dem Dielektrikum anlagen. Qualitativ dasselbe erhält man für (β), (γ), (δ).

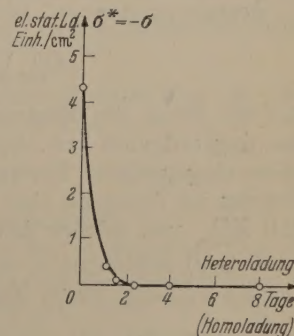


Abb. 8. Unterdrückung der Homoladung (Kathodenseite).

a) Grundannahmen.

Aus Abb. 6 geht hervor, daß im Innern des Elektreten ein Feld — es sei mit $\mathcal{E}^{(i)}$ bezeichnet — herrscht, welches in den ersten Tagen nach der Herstellung stark, später praktisch nicht mehr von der Zeit t abhängt. Der Zeitpunkt unmittelbar nach der Polarisierung sei durch $t = 0$ gekennzeichnet, während der maximale Wert der Homoladung zur Zeit $t = t_1$ angenommen werde. Die Elektretachse sei wieder z -Achse (Abb. 4). Wie bereits mehrfach (6., 9.) erschlossen, findet infolge des äußeren Feldes E_P eine Einwanderung von Ladungsträgern statt. Andererseits wird aber E_P die Elektronenhülle der Naphthalinmoleküle verschieben und ein Dipolmoment induzieren, so daß es auch zu einer Polarisierung des Dielektrikums kommt. Wir machen die folgenden Annahmen;

Annahme 1). Das innere Feld des Elektreten hängt hinsichtlich der Ortskoordinaten lediglich von z ab und setzt sich aus zwei Teilen zusammen, die den Einfluß von eingefrorenen Dipolen und wahren Ladungen berücksichtigen sollen:

$$E^{(i)}(z) = E_{Dip.}^{(i)}(z) + E_e^{(i)}(z). \quad (1)$$

Annahme 2). Zur Zeit $t = 0$ sind sämtliche infolge von E_P gebildeten Dipole parallel zur z -Achse eingefroren. Ihr Beitrag zu $E^{(i)}$ sei $(E_{Dip.}^{(i)})_{t=0}$. Es ist angenommen, daß die äußere Feldstärke trotz ihrer Schwächung durch die eingewanderten Ladungsträger noch groß genug ist, um die Ausrichtung zu ermöglichen, wie sie bei ungeschwächtem Feld vorhanden wäre. Eine Beeinflussung der Dipolausrichtung durch die eingewanderten Ladungsträger wird also vernachlässigt. Dies ist eine Näherung. Sie rechtfertigt sich aber durch die verschiedenen später angegebenen Kontrollen. Aus diesem Grund wird so gerechnet, als ob die durch die Dipole hervorgerufene Polarisierung unabhängig von z überall gleich sei (d. h. $\frac{\partial \mathcal{E}_z}{\partial z} = 0$), während die z -Abhängigkeit der eingewanderten Ladungsträger gesonderte Berücksichtigung erfährt (c)).

Annahme 3). Die Dipole werden zur Zeit $t = t_1$ wegen ihrer thermischen Bewegung ihre Vorzugsrichtung wieder verlassen haben und keinen Anteil mehr zu $E^{(i)}$ liefern, d. h.

$$(E_{Dip.}^{(i)})_{t=t_1} = 0. \quad (2)$$

Auf die Frage des Mechanismus der Rückbildung in den ungeordneten bzw. dipollosen Zustand wird nicht näher eingegangen. Der von den Dipolen herrührende Beitrag ist demnach eine Funktion der Zeit derart, daß $E_{Dip.}^{(i)}$ von seinem Anfangswert $(E_{Dip.}^{(i)})_{t=0}$ — er wird in d) berechnet — in einem Zeitraum von der Größenordnung einiger Tage (bis zur Zeit t_1) zu Null wird.

Annahme 4). Die während des Polarisierungsvorganges in das Dielektrikum eingewanderten Ladungsträger verbleiben an ihren nach dem Erstarren eingenommenen Plätzen, d. h. es gilt für den Anteil $E_e^{(i)}$:

$$(E_e^{(i)})_{t=0} = (E_e^{(i)})_{t=t_1}. \quad (3)$$

Mit diesen Annahmen schreibt sich Gl. (1) zur Zeit $t = 0$:

$$(E^{(i)}(z))_{t=0} = (E_{Dip.}^{(i)}(z))_{t=0} + (E_e^{(i)}(z))_{t=0}; \quad (4)$$

zur Zeit $t = t_1$:

$$(E^{(i)}(z))_{t=t_1} = (E_e^{(i)}(z))_{t=t_1} = (E_e^{(i)}(z))_{t=0};$$

d. h. im letzteren Fall wird das innere Feld nur noch durch die eingefrorenen wahren Ladungen bestimmt.

b) Methode zur Bestimmung des inneren Feldes und der Raumladungsverteilung. Möglichkeiten zur Prüfung der Grundannahmen.

Mit Hilfe der $(\sigma; z)$ -Kurve der Abb. 6, die ja bei $t = t_1$ aufgenommen wurde, kann man $\rho(z)$ ermitteln (c)). Graphische Integration liefert für jedes z $(E_e^{(i)})_{t=t_1}$ (c)). Die Integrationskonstante wird durch einen Meßwert bei $z = 0$ gewonnen. Eine Kontrolle liefert ein Punkt bei $z = 2l$ ($2l = 1,02$ cm ist die Dicke des Elektreten (c)). Damit ist dann gezeigt, daß tatsächlich entsprechend Annahme 3) $(E_{Dip.}^{(i)})_{t=t_1} = 0$ ist — es wurde ja bisher gar nicht benützt —, Gl. (1) ist also erfüllt.

Anschließend wird $(E_{Dip.}^{(i)})_{t=0}$ gemäß Annahme 2) berechnet (d)). Mit Gl. (3) erhält man dann aus $(E^{(i)})_{t=0}$. Für $z = 0$ und $z = 2l$ kann man aber unabhängig davon aus Meßpunkten den Wert von $(E^{(i)})_{t=0}$ erschließen (e)) und hat hierdurch eine Prüfung des eben anderweitig gefundenen $(E^{(i)})_{t=0}$ für diese beiden Punkte. Infolgedessen wird Annahme 2) bestätigt, ferner die gerade benützte Annahme 4). Die Annahme 1) rechtfertigt sich damit ohnehin und es ist schließlich jetzt Gl. (5) gültig. Eine weitere Bestätigung für die Richtigkeit des gefundenen Verlaufes von $(E^{(i)})_{t=0}$ resultiert aus dem plausiblen Ergebnis, daß $(E^{(i)})_{t=0}$, gemittelt über den ganzen Elektreten in die Größenordnung der angelegten Feldstärke E_P fällt (e)). Auf die angegebene Weise können also sämtliche gemachten Voraussetzungen geprüft und innere Feld und Raumladungsverteilung ermittelt werden.

c) Raumladungsverteilung. Von den Raumladungen herrührender Beitrag zum inneren Feld.

Das kreiszylindrische Dielektrikum trage Raumladungen $\rho(z)$. Es wird R konstant $= (R_1 + R_2)$ (Abb. 1) gesetzt, d. h. die Konizität vernachlässigt. An allen Punkten einer Ebene parallel zur xy -Ebene habe ρ denselben Wert. Wenn von Flächenladungen abgesehen wird, da in Strenge solche nur auf Leitern sitzen, gilt für das von den Raumladungen hervorgerufene Potential ψ_e an einem beliebigen Punkt allgemein:

$$\psi_e = \int \frac{\rho \, d\tau}{r^*}$$

s Abstand des Integrationspunktes vom Aufpunkt, V^* Volumen des Elektreten.

In unserem speziellen Fall wird daraus für einen Aufpunkt $z = z, x = y = 0$:

$$\psi_e(z) = 2\pi \int_0^z \rho(z) (\sqrt{R^2 + z^2} - z) dz + \text{const.}$$

$$\frac{d\psi_e}{dz} = 2\pi \rho(z) (\sqrt{R^2 + z^2} - z).$$

Wenn nun der Elektret eine bestimmte Dicke z_k hat, wird er auf einer auf seine Oberfläche gelegten Metallplatte eine bestimmte Flächenladungsdichte $\sigma(z)$ aufweisen.

influenzieren, deren Größe für jedes z_k aus Abb. 7 entnommen werden kann. Für $\sigma(z_k)$ besteht aber die Beziehung:

$$\left(\frac{d\psi_e}{dz}\right)_{z=z_k} = -\frac{4\pi\sigma(z_k)}{\varepsilon} = 2\pi\rho(z_k)(\sqrt{R^2 + z_k^2} - z_k), \quad (6)$$

wobei $\rho(z_k)$ die Raumladungsdichte an der Stelle z_k und $\varepsilon = 2,7$ die Dielektrizitätskonstante des Naphthalins (5.) ist. Hieraus folgt mit $R = (R_1 + R_2)/2 = 1,6$ cm (1.):

$$\rho(z_k) = -0,74 \cdot \frac{\sigma(z_k)}{\sqrt{2,56 + z_k^2} - z_k} \text{ el. stat. Ld. Einh./cm}^3.$$

Mit den σ -Werten der Abb. 7 gewinnt man damit die Verteilung der eingefrorenen Raumladungen $\rho(z)$, die die Homoladung repräsentieren, Abb. 9, und zwar, wie es sein muß, negativ an derjenigen Seite, die während der Polarisierung der Kathode benachbart und positiv an derjenigen, die der Anode angelegen war. Der positive Anteil weist auf den bereits erwähnten Ionenbetrag (6.) hin.

Wenn man nun mit Hilfe der Kurve Abb. 9 $\pi \int_0^z \rho dz$ bildet, erhält man für jedes z den Beitrag $(E_e^{(i)})_{t=t_1} = (E_e^{(i)})_{t=0}$ zum inneren Feld $E^{(i)}$. Er ist in Abb. 10 gezeichnet (oberste Kurve). Die Integrationskonstante ergibt sich dabei auf folgende Weise:

Es folgt aus Gl. (6) für $z = z_k = 0$ und $t = 0$ bzw. t_1 :

$$\left(\frac{d\psi_e}{dz}\right)_{z=0} = (E_e^{(i)})_{z=0} = -\frac{4\pi\sigma(0)}{\varepsilon}.$$

Aus Abb. 7 entnimmt man den experimentellen Wert $\sigma(0) = -1,57$; damit wird $(E_e^{(i)})_{z=0} = 7,3$ el. stat. Sp. Einh./cm. Hierdurch liegt die durch die Integration gefundene $E_e^{(i)}$ -Kurve auch hinsichtlich ihrer Ordinate fest.

Eine Kontrolle ergibt sich für den Wert $z = z_k = 1,02$. Aus Abb. 7 liest man den experimentellen Wert $\sigma(1,02) = 3,80$ ab. Daraus folgt nach (6) $(E_e^{(i)})_{z=1,02} = 17,7$ el. stat. Sp. Einh./cm. In sehr guter Übereinstimmung damit wird dieser Wert von der $E_e^{(i)}$ -Kurve in Abb. 10 angenommen.

c) Von den Dipolen herrührender Beitrag zum inneren Feld.

In dem wegen der Annahme $R = (R_1 + R_2)/2$ kreiszylindrisch vorausgesetzten Dielektrikum seien unmittelbar nach der Herstellung des Elektreten ($t = 0$) durch E_P gebildete Dipole in Richtung der z -Achse eingefroren. An allen Punkten einer Ebene parallel zur xy -Ebene herrsche dieselbe Polarisierung \mathfrak{P} . Für das von den Dipolen hervorgerufene Potential ψ_{Dip} gilt allgemein an einem beliebigen Punkt:

$$\psi_{Dip} = - \int_{V^*} \frac{\text{div } \mathfrak{P} d\tau}{s} + \int_{F^*} \frac{\mathfrak{P} d\vec{i}}{s}$$

s Abstand des Integrationspunktes vom Aufpunkt,
 V^* Volumen des Elektreten,
 F^* Oberfläche des Elektreten.

Wenn dieses gefunden ist, so erhält man daraus das gesuchte $(E_{Dip}^{(i)})_{t=0} = -\text{grad } \psi_{Dip}$.

Wegen Annahme 2) ist $\text{div } \mathfrak{P} = 0$ und man erhält nach bekannter Umformung¹ mit $|\mathfrak{P}| = \mathfrak{P}_z = P$:

$$\psi_{Dip} = 2\pi P (\sqrt{R^2 + (2l - z)^2} - \sqrt{R^2 + z^2} + 2z - 2l) + \text{const.}$$

Damit wird:

$$(E_{Dip}^{(i)})_{t=0} = -\text{grad } \psi_{Dip} = -2\pi P \left(\frac{z - 2l}{\sqrt{R^2 + (2l - z)^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} + 2 \right). \quad (7)$$

Man sieht also, daß trotz homogen angenommener Polarisation das innere Feld eine Funktion von z ist.

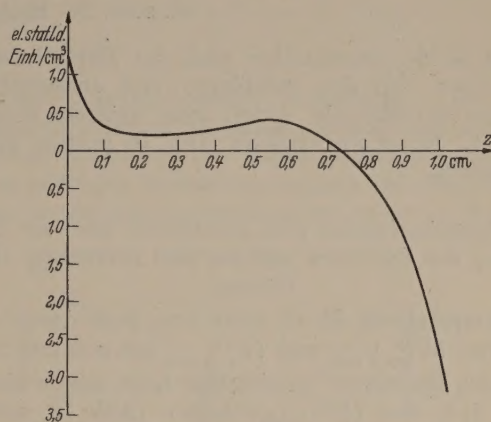


Abb. 9. Raumladungsverteilung im Innern des Elektreten.

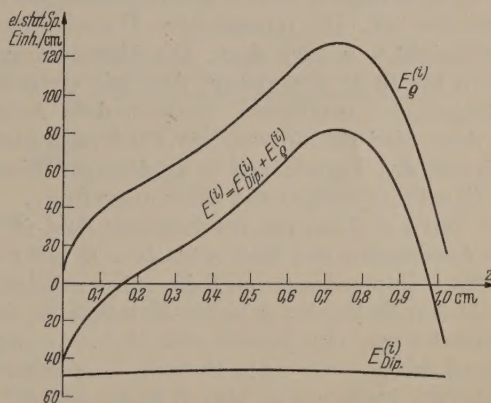


Abb. 10. Inneres Feld des Elektreten. Mittlere Kurve: Unmittelbar nach der Herstellung. Obere Kurve: Zur Zeit maximaler Homoladung. Untere Kurve: s. 10. d).

Dies rührt von der endlichen Ausdehnung des Elektreten her. Denn für $R \rightarrow \infty$ wird

$$(E_{Dip}^{(i)})_{t=0} = -4\pi P$$

unabhängig von z , wie es sein muß².

Nun ist noch der Wert der Polarisierung P zu bestimmen. Zwischen P und dem makroskopischen polarisierenden Feld E_P besteht, wenn man den LORENTZschen Ansatz für das am Ort eines herausgegriffenen Moleküls wirkende Feld annimmt, der Zusammenhang:

$$P = \frac{N\alpha E_P}{1 - \frac{4\pi}{3} N\alpha}. \quad (8)$$

¹ Siehe z. B. A. SOMMERFELD, Theor. Phys. III.

² Durch Bildung von $\oint \mathfrak{E} d\vec{s}$ etwa längs einer Feldlinie überzeugt man sich leicht davon, daß ein Elektret von endlichem innerem Feld und endlicher Dicke, aber mit $R \rightarrow \infty$, nur ein unendlich kleines äußeres Feld hervorruft.

Dabei ist $N = \frac{N_L \cdot \delta}{M}$ die Zahl der Molekeln im cm^3 , $N_L = 6,02 \cdot 10^{23}$ die LOSCHMIDTSche Zahl, δ die Dichte, M das Molekulargewicht (5.) und α die elektrische Polarisierbarkeit. Es ist nach [20] für Naphthalin $\alpha = 1,65 \cdot 10^{-23} \text{ cm}^3$. Setzt man diese Zahlenwerte mit $E_P = 11\,500 \text{ V/cm} = 38,4 \text{ el. stat. Sp. Einh./cm}$, $R = 1,6 \text{ cm}$ und $2l = 1,02 \text{ cm}$ in (8) und (7) ein, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (E_{Dip.}^{(i)})_{t=0} &= -32,9 \left(\frac{z-1,02}{\sqrt{2,56 + (1,02-z)^2}} - \frac{z}{\sqrt{2,56 + z^2}} + 2 \right) \\ &\quad \text{el. stat. Sp. Einh./cm.} \end{aligned}$$

Damit ist der unmittelbar nach der Herstellung des Elektreten von den gebildeten und ausgerichteten Dipolen herrührende Anteil zum inneren Feld berechnet. Er ist ebenfalls in Abb. 10 (untere Kurve) dargestellt.

e) *Gesamtes inneres Feld unmittelbar nach der Herstellung des Elektreten und zur Zeit maximaler Homoladung.*

Entsprechend Gl. (4) kann man jetzt durch Addition von $(E_{Dip.}^{(i)})_{t=0}$ und $(E_e^{(i)})_{t=0}$ das gesamte innere Feld des Elektreten unmittelbar nach seiner Herstellung, d. h. also $(E^{(i)})_{t=0}$ erhalten (Abb. 10, mittlere Kurve). Wir können seinen Wert für $z=0$ und $z=1,02$ in derselben Weise kontrollieren, wie das in c) geschehen ist. Die quantitative Übereinstimmung ist dabei nicht so gut wie dort. Die Abweichungen betragen 5 bis 15% — es hängt dies mit einigen Vernachlässigungen zusammen (insbesondere Annahme 2) —, doch wird die notwendige Forderung nach der Richtigkeit des Vorzeichens in eindeutiger Weise erfüllt. Es sei dies noch etwas näher ausgeführt.

Zur Zeit $t=0$ hat das resultierende Feld $(E^{(i)})_{t=0}$ an der Anodenseite des Elektreten ($z=0$) einen negativen Wert, infolgedessen muß die Influenzladung auf einer auf den Elektreten gelegten Metallplatte, die mit σ bezeichnet war (4.), positiv sein, d. h. — σ negativ. An Hand der unteren Abb. 10 kann man sehen, daß dies zutrifft. Nach etwas über 3 Tagen ist $(E_{Dip.}^{(i)})_{t=0}$ verschwunden und das resultierende Feld $(E^{(i)})_{t=t_1}$ wird nur noch von dem Feldanteil $(E_e^{(i)})_{t=t_1}$, der eingewanderten wahren Ladungen bestritten. Dieser aber muß dann, da $(E_e^{(i)})_{t=t_1}$ für $z=0$ positiv ist, für die Anodenseite ein negatives σ^* influenzieren, wie dies auch Abb. 7 zeigt. Eine entsprechende Überlegung kann man auch für die Kathodenseite ($z=1,02$) anstellen.

Man sieht also das Prinzip des Umladungsvorganges des Elektreten: Unmittelbar nach seiner Herstellung wird das resultierende innere Feld durch die eingefrorenen Ladungen und Dipole bestimmt. An den beiden Oberflächen des Elektreten wird dabei der Raumladungsanteil von dem Dipolanteil überkompensiert, so daß das Vorzeichen des Dipolanteils maßgebend ist. Es liegt Heteroladung vor. Nach einigen Tagen aber verschwindet dieser Beitrag und es bleibt nur noch der von den wahren Ladungen herrührende Anteil. Sein Vorzeichen an den beiden Enden des Elektreten kann nun zur Geltung kommen, d. h. es wird Homoladung erscheinen.

Als Mittelwert über den ganzen Elektreten unmittelbar nach seiner Herstellung erhält man aus Abb. 1 $(\bar{E}^{(i)})_{t=0} = 33,5 \text{ el. stat. Sp. Einh./cm} = 9400 \text{ V/cm}$ und zur Zeit maximaler Homoladung $(\bar{E}^{(i)})_{t=t_1} = 76, \text{ el. stat. Sp. Einh./cm} = 23\,000 \text{ V/cm}$. Es bestätigt sich damit die Erwartung, daß gleich nach der Formierung das mittlere innere Feld des Elektreten in der Größenordnung von $E_P (= 11\,500 \text{ V/cm, s. 3})$ liegt.

Wie aus Abb. 6 hervorgeht, nimmt auch nach Erreichen ihres Extremums zur Zeit $t=t_1$ die Homoladung zunächst wieder ab, strebt jedoch dann einer weitgehend permanenten Wert zu. Die Abnahme erklärt sich zwanglos daraus, daß infolge der eingefrorenen Raumladungen das verhältnismäßig stark mittlere Feld von $23\,000 \text{ V/cm}$ im Elektreten herrscht, welches wegen der zwar kleinen, aber immerhin vorhandenen Leitfähigkeit des Naphthalins zum Teil abgebaut wird. Wachs-Elektrete hingegen besitzen größeren spezifischen Widerstand (5.), so daß insbesondere deshalb und wegen eines anderen Verlaufes ihres inneren Feldes die Abnahme noch langsamer vor sich geht. Ein Gleiches gilt für Elektrete aus hochpolymeren Kunststoffen, die ebenfalls die charakteristische Vorzeichenumkehr aufweisen, worauf hier jedoch nicht näher eingegangen werden soll.

Zusammenfassung.

Auch Elektrete aus nichtpolaren Substanzen wie Naphthalin zeigen in gut reproduzierbarer Weise die charakteristische Umkehr von Heteroladung in weitgehend permanente Homoladung. Die Verwendung von verschiedenen, auch nichtmetallischen Elektrodenmaterialien, welche Ladungsträger in den Elektreten liefern, erweist sich von bestimmendem Einfluß auf Erscheinen und Größe der Homoladung. Sie bleibt aus, wenn die Elektroden, z. B. Glasplatten, keine Ladungsträger abgeben. Diesbezügliche Rückschlüsse lassen sich bereits aus dem Verlauf des während der Herstellung durch den Elektreten fließenden Stromes gewinnen. Um Vergleiche zu ermöglichen, muß dafür Sorge getragen werden, daß während des ganzen Polarisierungsvorganges, der in einem homogenen Feld vorgenommen wird, am Dielektrikum stets dieselbe Feldstärke unabhängig von Elektrodenart und Temperatur wirksam ist. Das innere Feld des Elektreten unmittelbar nach seiner Herstellung und bei maximaler Homoladung wird quantitativ bestimmt, wobei sich der Vorzeichenwechsel durch das Verschwinden eines anfänglich von gebildeten und ausgerichteten Dipolen hervorgerufenen Feldanteils erklärt. Ferner wird die Raumladungsverteilung im Innern des Elektreten ermittelt.

Herrn Professor Dr. W. MEISSNER bin ich für die Anregung dieser Arbeit wie auch für seinen vielseitigen Rat zu besonderem Dank verpflichtet.

Literatur. [1] EGUCHI, M.: Phil. Mag. **49**, 178 (1925). — [2] GEMANT, A.: Phil. Mag. **20**, 929 (1935). — [3] GUTMANN, F.: Rev. Mod. Phys. **20**, 457 (1948). — [4] THIESSEN, P. A., A. WINKEL u. K. HERRMANN: Phys. Z. **37**, 511 (1936). — [5] GROSS, B.: Phys. Rev. **66**, 26 (1944). — [6] GROSS, B.: Journ. Chem. Phys. **17**, 866 (1949). — [7] GROSS, B. u. L. F. DENARD: Phys. Rev. **67**, 253 (1945). — [8] SWANN, W. F. G.:

Phys. Rev. **78**, 811 (1950). — [9] SWANN, W. F. G.: Journ. Frankl. Inst. **250**, 219 (1950). — [10] SWANN, W. F. G.: Journ. Frankl. Inst. **255**, 513 (1953). — [11] GOOD, W. M. u. J. D. STRANATHAN: Phys. Rev. **56**, 810 (1939). — [12] VAN CALKER, J. u. R. ARNOLD: Z. Phys. **132**, 318 (1952). — [13] ARNOLD, R.: Phys. Vhdl. **4**, Heft **2**, 17 (1953). — [14] LANDOLT-BÖRNSTEIN: Phys.-chem. Tab. I (1923). — [15] D'ANS-LAX: Tabellenb. f. Chem. u. Phys. (1949). — [16] RABINOWITSCH, M.:

Z. phys. Chem. **119**, 70 (1926). — [17] GEIGER-SCHEEL: Handb. d. Phys. **XIII** (1928). — [18] PFESTORF, G. u. E.-F. RICHTER: Phys. Z. **39**, 141 (1938). — [19] MEISSNER, W.: Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss. (Mathem.-Naturwiss. Kl.), Sitzg. v. **3. 11. 1950**. — [20] LANDOLT-BÖRNSTEIN: Zahlenw. u. Funkt. I (1951).

Dr. rer. nat. WOLFGANG BALDUS,
Laboratorium für Technische Physik der T. H. München.

Vergleich röntgenographisch und magnetisch ermittelter Eigenspannungen in ferromagnetischen Metallen.

Von LUDWIG REIMER.

Mit 11 Textabbildungen

(Eingegangen am 15. Februar 1954.)

Einleitung.

In einer früheren Veröffentlichung [5] [6] konnte gezeigt werden, daß die nach einer plastischen Zugbeanspruchung zurückbleibenden Eigenspannungen I. Art qualitativ gut durch eine von GREENOUGH [1] aufgestellte Theorie erklärt werden können. Diese Theorie führt die auftretenden Eigenspannungen auf die Orientierungsabhängigkeit der Streckgrenzen der einzelnen Kristallite des vielkristallinen Hafwerkkes zurück. Die Eigenspannungen waren aber im Betrage bei Eisen etwa 7mal größer als sich nach der GREENOUGHschen Theorie ergeben würde. GREENOUGH selber [1] fand bei den flächenzentrierten Metallen Aluminium, Kupfer und Nickel quantitative Übereinstimmung mit der Theorie bis auf einen Faktor 1,5.

Es tauchte daher die Frage auf, ob diese bei Eisen beobachteten hohen Eigenspannungen einen Oberflächeneffekt darstellen, da man röntgenographisch nur eine sehr dünne Oberflächenschicht von $\frac{1}{100}$ bis $\frac{1}{1000}$ mm erfaßt. Vom Verfasser [7] wurde für Nickel die von KERSTEN [2] entwickelte magnetische Methode zur Bestimmung der Eigenspannungen aus der reversiblen Magnetisierungsarbeit mit dem Verfahren der röntgenographischen Spannungsmessung verglichen. Im Gegensatz zu SCHMID und MÜLLER [3] und DEHLINGER und SCHOLL [4] wurde röntgenographisch nicht die Linienverbreiterung sondern die Linienverschiebung der Debye-Scherrer-Linien einer Rückstrahlaufnahme zur Ermittlung der Eigenspannungen herangezogen. Wie für Eisen und Nickel gezeigt werden konnte [6] [7] besteht die Linienverbreiterung unter Senkrechtbeobachtung aus einem Hauptanteil, der von inhomogenen Eigenspannungen herrührt (bei starker Verformung eventuell noch Teilchenkleinheit) und einem Anteil, der von den gleichen homogenen Eigenspannungen II. Art herrührt, die sich auch in der Linienverschiebung äußern. Durch Schrägeinfall des Röntgenstrahles gelang eine Trennung dieser beiden Anteile (Abb. 1) [6] [7].

Die aus der röntgenographischen Linienverschiebung ermittelten Eigenspannungen stimmten bei Nickel gut mit den magnetischen aus der reversiblen Magnetisierungsarbeit bestimmten Eigenspannungen überein [7] (Abb. 2). Bei letzteren wurde berücksichtigt, daß nach der GREENOUGHschen Theorie ein einachsiger Eigenspannungszustand vorliegt, bei dem nur Eigenspannungen in Richtung der Probe auftreten, während KERSTEN [2] bei Ableitung seiner Formel eine regellose Spannungsverteilung voraussetzt. Außerdem wurde bei sämtlichen Messungen ein definierter Mittel-

wert der Eigenspannungen eingeführt. Bei den röntgenographischen Messungen erfaßt man nämlich nur einen Mittelwert der Eigenspannungen über die reflexionsfähigen Kristallite, dagegen bei den magnetischen Messungen nur einen solchen über die Kristal-

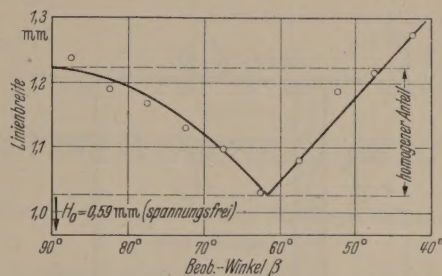


Abb. 1. Linienbreite des Nickels (420-Reflex) als Funktion des Winkels β der reflektierenden Netzebenen mit der Probenrichtung (H_0 = Linienbreite einer ausgeglühten Probe).

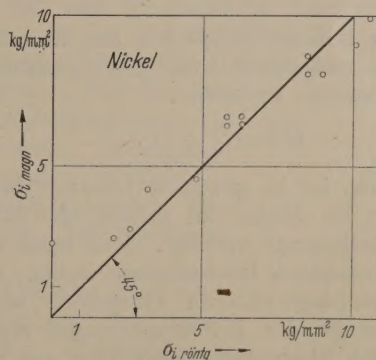


Abb. 2. Vergleich röntgenographisch und magnetisch ermittelter Eigenspannungen in Nickel.

lite mit Zugeigenspannungen. In den Kristalliten mit Druckeigenspannungen wird sich nämlich bei Nickel der Magnetisierungsvektor in Richtung der größten Stauchung einstellen, also in Probenrichtung. Diese Kristallite liefern daher zur Magnetisierungsarbeit keinen Beitrag. In den Kristalliten mit Zugspannungen ist die größte Stauchung quer zur Probenrichtung. Bei Anlegen eines Sättigungsfeldes leistet die auftretende Magnetostriktion Arbeit gegen die Zugeigenspannung in Probenrichtung. Es wurde daher der Mittelwert der Eigenspannungsbeträge gewählt. Eine numerische Auswertung unter Berücksichtigung der GREENOUGHschen Theorie ergab einen Korrekturfaktor $1,19 (\pm 5\%)$ gegenüber der von KERSTEN [2] angegebenen Formel.

$$|\sigma| = 1,19 \frac{U}{\lambda_{\infty}} = 1,19 \sigma_{i, \text{kersten}} \quad (1)$$

U = reversible Magnetisierungsarbeit, λ_∞ = Sättigungsmagnetostriktion. (Für letztere wurde der Wert $\lambda_\infty = 36 \cdot 10^{-5}$ benutzt.)

Bei Eisen liegen gegenüber Nickel bei der Anwendung der magnetischen Methode zwei Schwierigkeiten vor, die größere Kristallenergie und der Vorzeichenwechsel der Magnetostriktion. Die höhere Kristallenergie bewirkt, daß sich die Magnetisierungsvektoren bei Anwesenheit von Eigenspannungen nicht in eine elastische Vorzugslage (bei Nickel in Richtung der größten Stauchung) einstellen, sondern in der kristallographischen Vorzugsrichtung (100 bei Eisen) verbleiben. Bei Nickel ist die elastische Energie der Eigenspannungen $\sigma_i \cdot \lambda_\infty$ gegenüber der Kristallenergie U_k bereits bei kleinen Verformungen so groß, daß alle Magnetisierungsvektoren in Richtung der größten Stauchung eingedreht sind und daher bei der Magnetisierung die Kristallenergie nicht mehr aufgebracht zu werden braucht. Die gesamte reversible Magnetisierungsarbeit stellt sich dann als Arbeit dar, die die Magnetostriktion gegen die Eigenspannungen leistet.

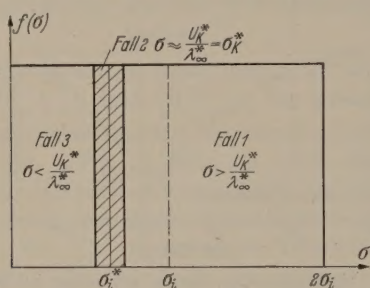


Abb. 3. Angenommene Verteilungsfunktion der Eigenspannungen.

Bei Eisen soll im Folgenden die Annahme gemacht werden, daß sich Kristall- und elastische Spannungsenergie additiv verhalten.

$$U = U_k + U_{el}. \quad (2)$$

Diese Annahme ist in gewissen Grenzen bei tiefen Temperaturen an Nickel zu prüfen, da dann eine größere Kristallenergie vorliegt. Man kann aus derartigen Experimenten Rückschlüsse ziehen, wie sich die Magnetisierungsvektoren einstellen, wenn die elastische Energie der Eigenspannungen nicht ausreicht, um den Magnetisierungsvektor aus der kristallographischen Vorzugsrichtung herauszudrehen. Allerdings läßt sich die Additivität der beiden Energieanteile nicht prüfen, da wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird, die elastische Energie U_{el} bei Nickel verschwindet, wenn $\sigma_i \lambda_\infty < U_k$.

Messung der reversiblen Magnetisierungsarbeit bei tiefen Temperaturen an Nickel.

Die Kristallenergie des Nickels beträgt bei Zimmertemperatur 5000 erg/cm^3 . Dem entspricht nach [1] eine formale Eigenspannung von $1,7 \text{ kg/mm}^2$. Wenn man den Einfluß kleiner Eigenspannungen, deren elastische Energie in der Größenordnung der Kristallenergie und kleiner ist, untersuchen will, so ist das zur Verfügung stehende Spannungsintervall bei Zimmertemperatur zu gering. Wenn man dagegen die Messungen bei tieferen Temperaturen, etwa -80°C (Kohlensäureschnee) durchführt; so ist die Kristallenergie etwa auf $20\,000 \text{ erg/cm}^3$ angestiegen.

Je nach den in den einzelnen Kristalliten vorliegenden Eigenspannungen kann man 3 Fälle unterscheiden:

1. Die elastische Energie der Eigenspannungen ist größer als die Kristallenergie, $\sigma_i > U_k/\lambda_\infty$. Die Magnetisierungsvektoren stellen sich im Falle des Nickels in Richtung der größten Stauchungen.
2. Die elastische Energie ist mit der Kristallenergie vergleichbar, $\sigma_i \approx U_k/\lambda_\infty$. Der Magnetisierungsvektor stellt sich vermutlich in diejenige 111-Richtung, die der größten Stauchung am nächsten liegt, und 3. Die elastische Energie ist kleiner als die Kristallenergie, $\sigma_i < U_k/\lambda_\infty$. Der Magnetisierungsvektor verbleibt in einer der drei möglichen kristallographischen Vorzugsrichtungen 111.

Bei Ableitung der Formel (1) wurde nach KERSTEN [2] angenommen, daß für sämtliche Eigenspannungen der Fall 1 vorliegt. Für den Fall 3 kann man nachweisen, daß die bei der Magnetisierung auftretende elastische Arbeit U_{el} der Magnetostriktion gegen die Eigenspannungen verschwindet ($U_{el} = 0$). Für einen einzelnen Kristalliten stellt sich nämlich diese Arbeit in der allgemeinen Form dar:

$$U_{el} = \Delta\lambda \cdot \sigma_i. \quad (3)$$

$\Delta\lambda$ bedeutet dabei die Magnetostriktionsänderung in Richtung der Eigenspannung σ_i , wenn der Magnetisierungsvektor aus der kristallographischen Vorzugsrichtung durch Anlegen eines äußeren Feldes in die Feldrichtung gedreht wird. Nimmt man an, daß die spontane Magnetisierung mit gleicher Wahrscheinlichkeit in allen 4 möglichen 111-Richtungen auftritt, so kann man zeigen, daß die mittlere Magnetostriktionsänderung in Probenrichtung (gemittelt über die 4 möglichen Anfangslagen) unabhängig von der Orientierung des einzelnen Kristalliten den Wert λ_∞ der Sättigungsmagnetostriktion besitzt. Nach der GREENOUGHschen Theorie befinden sich aber alle Eigenspannungen in Probenrichtung, da auch die vorher angelegte Verformungsspannung bei den reinen Zugversuchen in Probenrichtung wirkte. Um den Beitrag der gesamten Probe zur reversiblen Magnetisierungsarbeit zu erhalten, muß man (3) über sämtliche Kristallite mitteln. Da $\Delta\lambda = \lambda_\infty$ von der Orientierung unabhängig ist, braucht nur über σ_i gemittelt werden. Dieser Mittelwert verschwindet, da die Druckeigenspannungen durch entsprechende Zug-eigenspannungen im Gleichgewicht gehalten werden. Nach (2) darf in diesem Fall 3 also nur die Kristallenergie U_k als reversible Magnetisierungsarbeit auftreten.

Den Fall 2 kann man numerisch mit Hilfe der GREENOUGHschen Theorie erfassen. Es ergab sich nach Rechnungen des Verfassers

$$U_{el} = \frac{1}{2,2} |\overline{\sigma}| \cdot \lambda_\infty. \quad (4)$$

In der nachfolgenden Rechnung soll zunächst angenommen werden, daß das Eigenspannungsintervall, in dem der Fall 2 auftritt, gegenüber den Fällen 1 und 3 vernachlässigt werden kann. Außerdem wird eine konstante Verteilungsfunktion der Eigenspannungen vorausgesetzt, Abb. 3. Diese Annahme ist berechtigt, da man nach der GREENOUGHschen Theorie die Eigenspannungen als Funktion der Kristallorientierung berechnen und statistisch auswerten

ann, wobei man angenähert die Verteilungsfunktion der Abb. 3 enthält. Durch einen angehängten Sternchen (*) im Folgenden die Größen bei tiefer Temperatur (-80°C) gekennzeichnet werden. Dann werden alle Kristallite mit Eigenspannungen $\sigma_i^* < U_k^*/\lambda_{\infty}^*$ (Fall 3) mit dem Betrage der Kristallenergie U_k^* zur reversiblen Magnetisierungsarbeit beitragen. Alle Kristallite mit $\sigma_i^* > U_k^*/\lambda_{\infty}^*$ (Fall 1) werden nur elastische Arbeit $U^* = \sigma_i^* \cdot \lambda_{\infty}^*$ liefern. Da die bei Zimmertemperatur nach der Formel $\sigma_i = U/\lambda_{\infty}$ berechneten Eigenspannungen einen Mittelwert darstellen, werden die Eigenspannungen zwischen 0 und $2\sigma_i$ schwanken. Sei die Eigenspannung, die formal der Kristallenergie U_k^* bei tiefer Temperatur entspricht. Unter der Voraussetzung gleicher Besetzungsdichte (Abb. 3) wird der Bruchteil $\sigma_k^*/2\sigma_i$ aller Kristallite Eigenspannungen kleiner als diese Größe σ_k^* haben, trägt so nur mit der Kristallenergie U_k^* bei. Das Komplement $(1 - \sigma_k^*/2\sigma_i)$ wird im Mittel mit einer elastischen Energie beitragen, die sich aus dem Mittelwert der Eigenspannungen $2\sigma_i$ und σ_k^* zu

$$U^* = \frac{2\sigma_i + \sigma_k^*}{2} \lambda_{\infty}$$

gibt. Die gesamte reversible Magnetisierungsarbeit ist demnach:

$$U^* = U_k^* \frac{\sigma_k^*}{2\sigma_i} + \lambda_{\infty}^* \frac{2\sigma_i + \sigma_k^*}{2} (1 - \sigma_k^*/2\sigma_i). \quad (5)$$

Setzt man diese Gleichung auf, so ergibt sich unter Benutzung der Beziehung $U = \lambda_{\infty} \cdot \sigma_i$

$$U^* = U \frac{\lambda_{\infty}^*}{\lambda_{\infty}} + \frac{U_k^{*2} \lambda_{\infty}^*}{4 \cdot U \lambda_{\infty}^*}. \quad (6)$$

Setzt man hierin die Zahlenwerte $U_k^* = 20\,800 \text{ erg/cm}^3$ und $\lambda_{\infty}^*/\lambda_{\infty} = 1,1$ [10] als Verhältnis der Magnetostriktionen bei -80°C und Zimmertemperatur ein, so resultiert

$$U^* = 1,1 U + \frac{10^8}{U}. \quad (7)$$

In Abb. 4 sind die bei Zimmertemperatur und -80°C in einer Kohlensäureschnee-Alkohol-Mischung gemessenen reversiblen Magnetisierungsarbeiten gegen die vorher angelegte äußere Belastung σ_a aufgetragen. Aus dem Vergleich der röntgenographisch ermittelten Eigenspannungen mit den Werten aus der reversiblen Magnetisierungsarbeit bei Zimmertemperatur ergab sich, daß bei Nickel oberhalb einer Belastung von $\sigma_a = 12 \text{ kg/mm}^2$ die magnetischen Messungen der Eigenspannungen mit den röntgenographisch ermittelten Eigenspannungen übereinstimmen. Nach Formel (7) kann man also die bei tiefen Temperaturen erwartende reversible Magnetisierungsarbeit U^* aus der bei Zimmertemperatur gemessenen Magnetisierungsarbeit U berechnen. Die obere in Abb. 4 angezeichnete Kurve ist auf diese Weise aus der unteren Kurve, die zeichnerisch gemittelt ist, gewonnen. Die gute Wiedergabe der Meßwerte zeigt, daß die vorausgesetzten Annahmen mit den Beobachtungen verträglich sind. Insbesondere ergibt sich, daß der Fall 2, wie bei der Rechnung vorausgesetzt wurde, praktisch nicht ins Gewicht fällt, da sich der gemessene Kurvenverlauf durch die Fälle 1 und 3 erklären läßt, d. h. offensichtlich ist das Spannungsintervall, in dem dieser Fall eintritt, sehr schmal. Bei Eigenspannungen, deren elastische Energie kleiner als

die Kristallenergie ist, liegt nach diesen Ergebnissen also der Fall 3 vor; die Magnetisierungsvektoren drehen sich unter Einwirkung der Eigenspannungen nicht in eine elastische Vorzugslage sondern verbleiben in den kristallographischen Vorzugsrichtungen von denen keine energetisch ausgezeichnet ist.

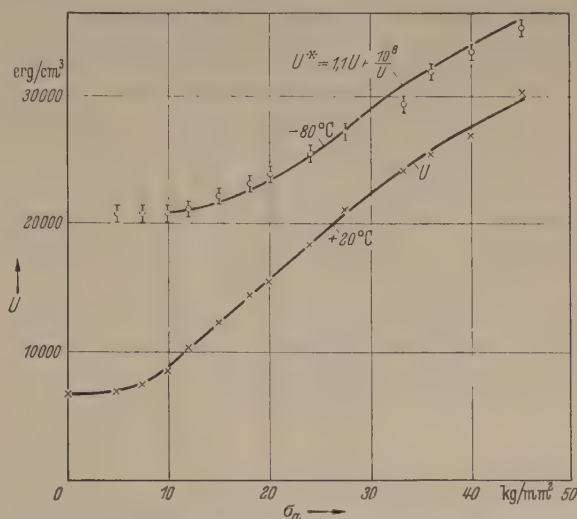


Abb. 4. Reversible Magnetisierungsarbeit U bei Zimmertemperatur und -80°C als Funktion der vorher angelegten äußeren Spannung σ_a .

Erweiterung der magnetischen Eigenspannungsmessung auf Eisen.

Der Kristallenergie des Eisens $U_k = 70\,000 \text{ erg/cm}^3$ würde nach (3) eine formale Eigenspannung von 80 kg/mm^2 entsprechen. Es liegt bei Eisen also sicher der Fall vor, daß die elastische Energie der Eigenspannungen kleiner als die Kristallenergie ist. Die Untersuchungen des letzten Abschnittes zeigten, daß sich in diesem Fall der Magnetisierungsvektor nicht in eine elastische Vorzugslage einstellt, sondern in Richtung der kristallographischen Vorzugsrichtung (100 bei Eisen) verbleibt.

Der Einfluß plastischer Verformung und der damit auftretenden Eigenspannungen auf die reversible Magnetisierungsarbeit ist bislang bei Eisen noch nicht näher untersucht worden. Es liegen nur Messungen bei statischer Zug- und Druckbelastung unter anliegender Last vor. Es tritt bekanntlich eine Überschneidung der Magnetisierungskurven des belasteten und unbelasteten Materials in dem sogenannten Villari-Punkt auf, was eine Folge des Vorzeichenwechsels der Magnetostriktion ist. In Abb. 5 ist schematisch der Einfluß einer statischen Zug- bzw. Druckspannung auf die Neukurve des Eisens wiedergegeben. Da bei einer Eigenspannungsmessung die Probe stets entlastet wird, muß die Summe der Eigenspannungen verschwinden. Es werden immer die Druckeigenspannungen durch entsprechende Zugeigenspannungen im Gleichgewicht gehalten. Man könnte daher vermuten, daß sich gemäß Abb. 5 der Einfluß von Kristalliten mit Druck- bzw. Zugeigen-

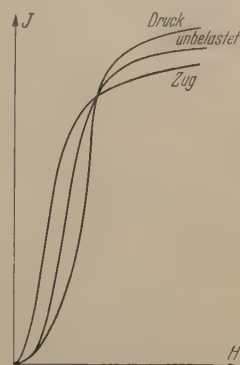


Abb. 5. Neukurven von Eisen unter Zug und Druck (schematisch).

spannungen auf die Magnetisierungskurve des unbelasteten Materials gerade aufhebt. Diese Folgerung darf man aber nur dann ziehen, wenn die Eigenspannungen nicht von der Orientierung der Kristallite abhängen, was bei den vorliegenden Eigenspannungen II. Art nicht der Fall ist.

Von BECKER [8] und AKULOV [9] sind theoretische Ausdrücke für die Orientierungsabhängigkeit der

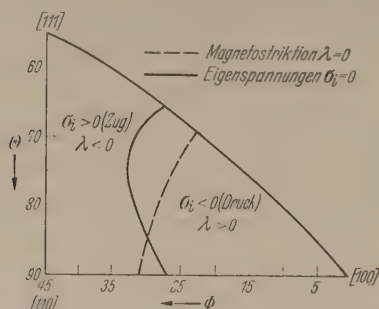


Abb. 6. Orientierungsabhängigkeit der Magnetostriktion des Eisens und der Eigenspannungen im Elementardreieck der stereographischen Projektion.

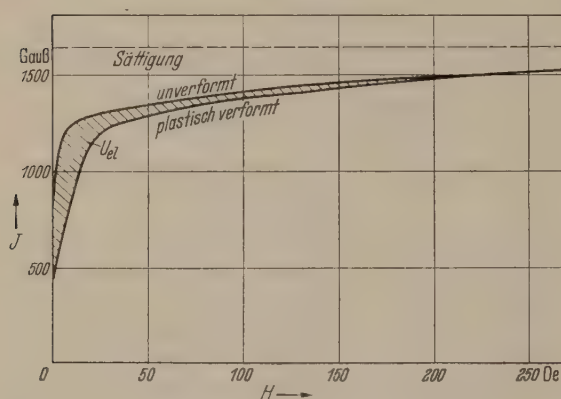


Abb. 7. Oberer Ast der Magnetisierungskurve des Eisens einer plastisch gereckten und spannungsfreien Probe.

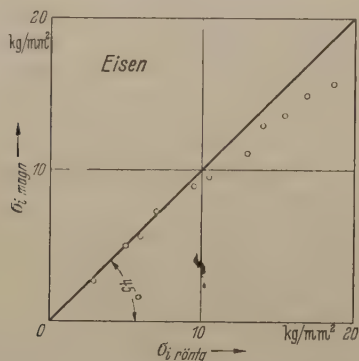


Abb. 8. Vergleich röntgenographisch und magnetisch ermittelter Eigenspannungen in Eisen.

Sättigungsmagnetostriktion aufgestellt worden. Ermittelt man mit Hilfe dieser Formeln die Linie verschwindender Sättigungsmagnetostriktion in dem Elementardreieck der stereographischen Projektion, so ergibt sich der Verlauf der Abb. 6. In das gleiche Diagramm ist die Linie verschwindender Eigenspannungen eingetragen, da nach der GREENOUGHschen Theorie die Eigenspannungen II. Art eine Funktion der Orientierung der Kristallite zur Probenrichtung sind. Man erkennt, daß diese beiden Nulllinien praktisch zusammenfallen. In dem Gebiet, welches positive Magnetostriktion liefert, sind vor-

wiegend Druckeigenspannungen vorhanden. Daher liefern diese Kristallite nur einen Beitrag, wie in Abb. 5 eine statische Druckspannung (Abb. 5) unterhalb des Villari-Punktes leisten würde, während im Gebiet negativer Sättigungsmagnetostriktion Zugeigenspannungen vorhanden sind, also nur ein Beitrag der statischen Kurve unter Zugbelastung oberhalb des Villari-Punktes hinzukommt. Es wird also auf jeden Fall die Magnetisierungskurve des plastisch verformten Materials nach diesen Überlegungen unterhalb derjenigen einer ausgeglühten Probe verlaufen, was experimentell bestätigt werden kann (Abb. 7).

Nach (2) stellt die Fläche zwischen diesen beiden Kurven die elastische Arbeit U_{el} dar. Um dies quantitativ mit der Größe der Eigenspannungen in Verbindung zu setzen, muß in Formel (3) der Ausdruck $\Delta l \cdot \sigma_i$ über sämtliche Kristallite gemittelt werden. Dies erfolgte numerisch mit Hilfe der Formeln von BECKER und AKULOV für die Magnetostriktion und für die Eigenspannungen mit Hilfe der Theorie von GREENOUGH. Dabei wurde die Magnetostriktionsänderung in Richtung der Eigenspannung über sämtliche 3 möglichen 100-Richtungen gemittelt, da sich der Magnetisierungsvektor nach den Untersuchungen des letzten Abschnittes mit gleicher Wahrscheinlichkeit in diesen Anfangslagen aufhält. Die numerische Auswertung ergab:

$$|\bar{\sigma}| = 0,98 \cdot 10^{-3} \cdot U_{el} \text{ kg/mm}^2. \quad (8)$$

(Im Gegensatz zu Eisen ist bei Nickel die Magnetostriktion praktisch von der Orientierung unabhängig, so daß bei den Berechnungen des letzten Abschnittes diese aus dem Mittelwert über (3) herausgezogen werden konnte. Daher lieferten bei Nickel kleine Eigenspannungen keine elastische Energie.)

Röntgenographisch wurden die Eigenspannungen aus der Linienverschiebung des 310-Reflexes mit Co-K α -Strahlung ermittelt. Wie früher nachgewiesen werden konnte [6], mißt man bei dem Eigenspannungszustand, der nach einer plastischen Dehnung vorliegt, unter einem Beobachtungswinkel $\beta = 63^\circ$ gegen die Probenachse den Gitterkonstantennullwert. Daher wurden Aufnahmen unter diesem Winkel und Senkrechten ($\beta = 90^\circ$) durchgeführt. Aus der Differenz der Linienabstände von einer Silbereichstofflinie erhält man die Linienverschiebung und damit die relative Gitterkonstantenänderung, aus der man mit Hilfe der Spannungs-Dehnungs-Beziehung die Eigenspannung ermitteln kann. Man mißt bei diesem Verfahren aber nur den Mittelwert der Eigenspannungen über die reflexionsfähigen Kristallite. Eine numerische Auswertung mit Hilfe der GREENOUGHschen Theorie liefert:

$$|\bar{\sigma}| = 1,80 \sigma_{röntg}. \quad (9)$$

Die nach den Formeln (8) und (9) ermittelten Eigenspannungen sind in Abb. 8 gegeneinander aufgetragen. Wenn auch die magnetisch ermittelten Eigenspannungen bei hohen Verformungsgraden bis maximal 10% kleiner sind als die röntgenographischen Werte, so zeigt das Ergebnis jedenfalls, daß die Eigenspannungen, die röntgenographisch an der Oberfläche gemessen werden, auch magnetisch als Mittelwert über den gesamten Probenquerschnitt gefunden werden. Damit ist klargestellt worden, daß es sich bei den hohen Eigenspannungen des Eisens um einen Volumeneffekt handelt.

Thermische Erholung der Eigenspannungen.

Bei dem Vergleich röntgenographisch und magnetisch ermittelter Eigenspannungen in Nickel und Eisen werden die homogenen Eigenspannungen II. Art der REENOUHGSchen Theorie herangezogen, die sich einfließen in einer Linienverschiebung des Rückstrahlreflexes und andererseits in einer zusätzlichen Linienverbreiterung äußern, die unter einem Einfallswinkel $\beta \approx 60^\circ$ verschwindet (Abb. 1). Bei diesem Winkel tritt nur die Verbreiterung durch inhomogene Eigenspannungen vor, die sich offenbar magnetisch in der reversiblen Magnetisierungsarbeit nicht bemerkbar machen. Der Einfluß der beiden Arten von Eigenspannungen ist deshalb schwierig zu trennen, weil

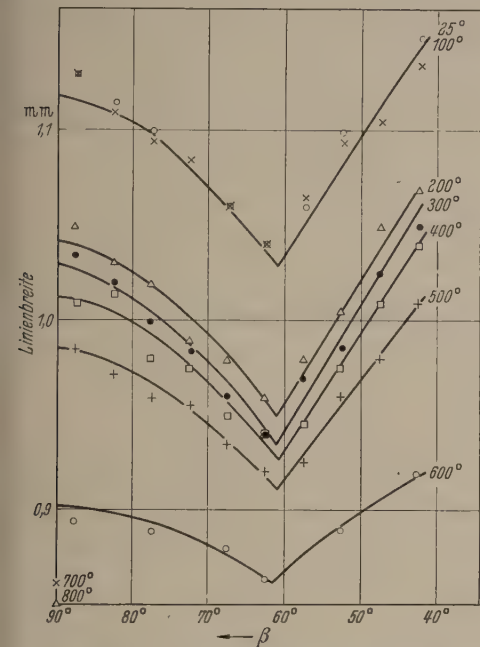


Abb. 9. Erholung der Linienbreite des Nickels unter verschiedenem Winkel β . Parameter ist die Glühtemperatur.

in gleicher Weise mit der vorher angelegten Spannung ansteigen. Es wird versucht, diese beiden Anteile durch schrittweise thermische Erholung zu trennen.

Eine Nickelprobe wurde 20% plastisch gedehnt. Anschließend wurde sie bei verschiedenen Temperaturen jeweils 2 Stunden geglüht. Dabei erfolgte die Kühlung der Proben langsam im Ofen, um keine zusätzlichen Eigenspannungen durch zu rasches Abkühlen hervorzurufen. Nach jeder Glühung wurden bei Zimmertemperatur die reversible Magnetisierungsarbeit und die Linienbreite des Rückstrahlreflexes mit Cu-K α -Strahlung unter verschiedenem Betrachtungswinkel β gemessen. Letztere ist in Abb. 9 der Glühtemperatur als Parameter aufgetragen. Grundsätzlich ergibt sich die gleiche Winkelabhängigkeit wie in Abb. 1. Bis 400°C sind die Kurven lediglich nach unten verschoben. Das bedeutet, daß die Grundlinienbreite unter $\beta = 60^\circ$ abgenommen hat, der homogene Anteil der Linienbreite unverändert geblieben ist. Erst bei Temperaturen oberhalb 400°C nimmt auch der homogene Anteil ab, was sich darin äußert, daß die Kurven flacher werden. Die reversible Magnetisierungsarbeit U , die Grundlinienbreite $H_{60} - H_0$ (inhomogene Spannungen) und der homogene Anteil der Linienbreite $H_{90} - H_{60}$ sind

in Abb. 10 gegen die Glühtemperatur aufgetragen. H_{60} bzw. H_{90} bedeuten die Halbwertsbreiten der 420-Reflexe unter Schrägeinfall ($\beta = 60^\circ$) bzw. Senkrechteinfall ($\beta = 90^\circ$). Es war bereits früher darauf hingewiesen [6], daß der homogene Anteil der Linienbreite durch die gleichen Eigenspannungen II. Art

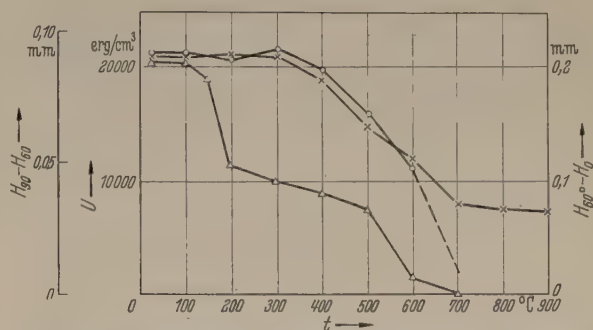


Abb. 10. Erholungsdiagramm des Nickels. \times = reversible Magnetisierungsarbeit U , O = homogener Anteil der Linienverbreiterung $H_{90} - H_{60}$, \triangle = Grundlinienbreite $H_{60} - H_0$.

hervorgerufen wird, die auch die Linienverschiebung verursachen.

Das Diagramm zeigt, daß die inhomogenen Eigenspannungen bei Temperaturen von ca. 200°C sehr stark abfallen. Demgegenüber nehmen die homogenen Eigenspannungen und die reversible Magnetisierungsarbeit erst bei Temperaturen oberhalb 400°C ab. Der restliche Betrag der Magnetisierungsarbeit

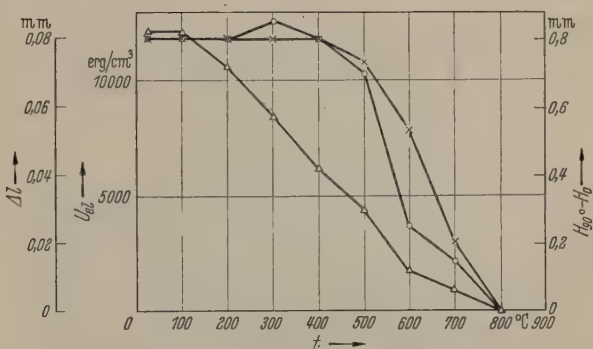


Abb. 11. Erholungsdiagramm des Eisens. \times = elastischer Anteil der reversiblen Magnetisierungsarbeit U_{el} , O = Linienverschiebung Δl , \triangle = Gesamtlinienverbreiterung $H_{90} - H_0$.

bei hohen Temperaturen ist auf die Kristallenergie zurückzuführen.

Mit diesem Resultat ist also die Auffassung bestätigt, daß sich nur die homogenen Eigenspannungen II. Art in der reversiblen Magnetisierungsarbeit bemerkbar machen und die inhomogenen Spannungen keinen Beitrag leisten.

Analoge Verhältnisse ergeben sich bei Eisen. Nur darf hier natürlich nur die elastische reversible Magnetisierungsarbeit U_{el} herangezogen werden. Als Maß für die homogenen Eigenspannungen wurde direkt die Linienverschiebung und als Maß für die inhomogenen Verzerrungen die Linienverbreiterung unter Senkrechteinfall gemessen ($H_{90} - H_0$). Man muß beachten, daß letztere noch einen Anteil der homogenen Eigenspannungen enthält, der sich nach früheren Untersuchungen [6] an Eisen zu etwa 40% ergibt. Man erkennt auch bei Eisen (Abb. 11), daß sich die Linienbreite bereits bei niedrigen Temperaturen zu erholen beginnt, wenn auch nicht ein so ausgeprägter Sprung wie bei Nickel vorhanden ist. Demgegenüber

verläuft die Erholung der Linienverschiebung parallel zur reversiblen Magnetisierungsarbeit, so daß auch bei Eisen in den reversiblen Effekten der Magnetisierungsarbeit sich die inhomogenen Eigenspannungen offenbar nicht bemerkbar machen.

Zusammenfassung.

Durch Messung der reversiblen Magnetisierungsarbeit bei tiefer Temperatur (-80°C) wird für Nickel gezeigt, wie sich die Magnetisierungsvektoren einstellen, wenn die Energie der Eigenspannungen kleiner als die Kristallenergie ist. Eine Erweiterung der Methode der reversiblen Magnetisierungsarbeit zur Bestimmung innerer Spannungen auf Eisen liefert, wie auch schon früher an Nickel gezeigt werden konnte, Übereinstimmung der magnetisch ermittelten Eigenspannungen mit den röntgenographisch aus der Linienverschiebung bestimmten Eigenspannungen. Damit kann gezeigt werden, daß die früher in Eisen gefundenen hohen Eigenspannungen einen Mittelwert über den gesamten Probenquerschnitt darstellen und nicht auf einen Oberflächeneffekt zurückzuführen sind.

Messungen der thermischen Erholung bestätigen das Ergebnis, daß sich die inhomogenen Eigenspannungen, die den Hauptanteil der röntgenographischen Linienverbreiterung bilden, magnetisch in der reversiblen Magnetisierungsarbeit nicht bemerkbar machen.

Die Reineisen- und Nickelproben wurden von der Vakuumschmelze Hanau geliefert.

Herrn Prof. Dr. KAPPLER danke ich für sein freundliches Interesse bei der Durchführung der Arbeit und für die Bereitstellung von Institutsmitteln.

Literatur. [1] GREENOUGH, G. B.: Proc. Roy. Soc. (A) **197**, 556 (1949). — [2] KERSTEN, M.: Z. Phys. **76**, 5 (1932). — [3] SCHMID, W. E. und E. MÜLLER: Z. techn. Phys. **1**, 161 (1935). — [4] DEHLINGER, U. und H. SCHOLL: Z. Metallkd. **44**, 136 (1953). — [5] KAPPLER, E. u. L. REIMER: Naturw. **40**, 360 (1953). — [6] KAPPLER, E. u. L. REIMER: Z. angew. Phys. **5**, 401 (1953). — [7] KAPPLER, E. u. L. REIMER: Naturw. **40**, 523 (1953). — [8] BECKER, R.: Phys. **87**, 547 (1934). — [9] AKULOV, N.: Z. Phys. **52**, 3 (1929). — [10] BOZORTH, R.: Ferromagnetism, London 1951.

Dr. LUDWIG REIMER,
Physikalisches Institut der Universität
Münster (Westf.), Schloßplatz 7.

Zur Standard-Dosimetrie der Grenz- und Weichstrahlen*

Von ROBERT JAEGER.

Mit 6 Textabbildungen.

(Eingegangen am 4. Februar 1954.)

Die wachsende Bedeutung weicher Röntgenstrahlen für klinische Anwendungen und biophysikalische Untersuchungen macht es notwendig, sich auf einwandfreie Standardmessungen der Röntgen-Dosis



Abb. 1. Standardanlage zur Absolutmessung des internationalen Röntgen (r) zwischen 50 und 200 kV (Institut Oeckstadt).

stützen zu können, wobei heute auch sehr hohe und sehr niedrige Dosisleistungen in Betracht gezogen werden müssen. Herr RAJEWSKY und der Verf. waren auf Grund verschiedener Mitteilungen und Erfahrungen zu der Überzeugung gekommen, daß die oben genannte Bedingung nicht mit ausreichender Sicherheit erfüllt ist und führten daraufhin zusammen mit einer Reihe von Mitarbeitern, die in der Zusammenfassung genannt sind, Untersuchungen mit verschiedenen Kammertypen und Methoden durch.

Die Standardmessungen mußten unter zwei verschiedenen Aspekten vorgenommen werden. Zunächst galt es, in Anbetracht der von E. G. ROTH-NEUSELAND bei seinen Vergleichsmessungen zwischen den verschiedenen nationalen Standards in Melbourne, Cleveland, Washington, Teddington, Stockholm und Oeckstadt gefundenen Abweichungen die Sicherheit der Absolutbestimmung des internationalen Röntgen zu kontrollieren und weiter zu festigen. Die weitere Arbeit sollte dem Ausbau der Dosimetrie auf dem Grenz- und Weichstrahlgebiet gewidmet sein.

Um die erste Forderung erfüllen zu können, bedienten wir uns der folgenden Methode: Wird ein Tunnel von zwei verschiedenen Seiten eines Berges angebohrt und treffen beide Parteien im Innern des Berges genau aufeinander, so ist darin der Beweis zu erblicken, daß sie beide vollkommen exakt gerechnet und gearbeitet haben. Wird man also mit einem Kammertyp bei weichen Strahlungen anfangen und allmählich zu härteren gehen, mit einem anderen Kammertyp dagegen von harten Strahlungen her sich allmählich den weichen nähern und sich bei einer bestimmten Strahlenhärte, die wir bei etwa 50 kV angestetzt haben, bei dem gleichen Absolutwert treffen, so ist eine hohe Wahrscheinlichkeit dafür gegeben, daß der Absolutbetrag des Röntgen sowohl im weichen wie im harten Spektralgebiet richtig ist. Ich darf an dieser Stelle vorwegnehmen, daß sich bei den Untersuchungen im Institut Oeckstadt beide Meßreihen tatsächlich sehr genau getroffen haben.

Für die Absolutbestimmung des Röntgen zwischen 50 und 200 kV wurde die zylindrische sogenannte Faßkammer nach dem Vorbilde von HOLTHUSEN verwendet. Ihre Anordnung, wie sie nach dem Krieg auf Anregung und mit Unterstützung von Herrn

* Mitteilung aus dem Max-Planck-Institut für Biophysik, Frankfurt/M.-Oeckstadt. Nacheinem Vortrag, gehalten auf dem 7. Internationalen Radiologenkongreß 1953 in Kopenhagen.

JAESKY im Institut Ockstadt als Ersatz und zur Weiterführung der alten durch Kriegseinwirkungen verloren gegangenen Faßkammer der Physikalisch-technischen Reichsanstalt aufgebaut worden ist, vgl. Abb. 1.

Der Aufbau der Anlage, die zusammen mit den Herren SEWKOR und POHLIT errichtet wurde, ist bereits ausführlich beschrieben worden (JAEGER 1952).

Für die Weichstrahlung wurde eine Parallelplattenkammer nach dem Vorbilde von TAYLOR und STONEBURNER konstruiert, die sich von der zylindrischen Kammer durch die andere Feldverteilung unterscheidet. An dieser Kammer, bei der die Meßblende fest geordnet und das Meßsystem ihr gegenüber beweglich war, wurden sehr ausführliche Kontrollen der Homogenität des Feldes, des Durchgriffs äußerer Felder durch die Potentialdrähte, des Einflusses der Spaltweite zwischen Meßelektrode und Erdelektrode sowie vieler anderer Faktoren durchgeführt. Den schematischen Aufbau der Weichstrahlkammer gibt Abb. 2 wieder.

Um den Einfluß äußerer Felder in ausreichender Weise auszuschalten und bis auf 1,5 bis 2 cm an den Potentialkäfig herangehen zu können, erwies es sich als notwendig, die Potentialdrähte, die aus feinsten abisolierten Perlonfäden bestanden, in einem geeigneten Abstand von 2,5 mm anzuordnen. Die Absorption durch die Fäden wurde in jedem Fall experimentell ermittelt. Sie betrug z. B. bei 8 kV Röhrenspannung rd. 1%.

Besondere Sorgfalt wurde auf die Ausbildung des Elektroden-systemes gelegt. Der Aufbau desselben zeichnet sich durch große Stabilität aus. Zum Einsetzen verschieden breiter und langer Meßelektroden wurde das gesamte System ausgewechselt. Es hatte sich gezeigt, daß es notwendig war, die Meßsysteme so auszubilden, daß die Flächen der Meßelektrode und der Schutzelektroden genau in einer Ebene lagen. Die Spaltweiten zwischen den Elektroden waren bis zu 3 mm ohne meßbaren Einfluß. Die genaue Proportionalität des Ionisationsstromes mit der Länge der Meßelektrode und dem Durchmesser der Blende wurde besonders geprüft.

Man mag bei einer Standardmessung der Röntgenstrahlung alle Faktoren der Standardkammern und der Meßanordnung noch so genau berücksichtigen, so wird dennoch bei der Übertragung des Röntgen auf eine klinische Meßkammer der Einfluß der inhomogenen Verteilung des Strahlenfeldes und der zeitlichen Konstanz derselben stets die ausschlaggebende Rolle spielen. Die dadurch entstehenden Fehler sind schwer kontrollierbar und bisher zweifellos nicht in genügendem Maße berücksichtigt worden. Anderenfalls sind alle Diskrepanzen, die trotz sorgfältiger Ablesungen immer wieder auftreten, nicht erklärbar. Aus diesem Grunde wurde neben den anderen Faktoren gerade der Einfluß der Verteilung des Strahlenfeldes besondere Aufmerksamkeit geschenkt. Man darf nicht vergessen, daß er bei Weichstrahlungsmessungen eine noch viel größere Rolle spielt als im Gebiet der Tiefentherapie, in dem man mit recht großen Brennflecken und sehr kleinen Fokusabständen arbeitet.

Als Beispiel der Fokusstruktur einer Weichstrahlröhre mit Berylliumfenster ist in Abb. 3 ihre Lochkameraaufnahme wiedergegeben. Man erkennt neben dem Hauptfokus eine Reihe von Geistern, die bei einer

Standardmessung besonders störend wirken können. Über den Einfluß der Fokusstruktur und seine Beseitigung führte E. BUNDE Untersuchungen durch, über die er an anderer Stelle berichten wird.

Durch die genannten Faktoren ergibt sich die Forderung auf die Erfüllung folgender Bedingungen:

a) Verwendung einer Durchstrahlkammer als Monitorkammer. Ihre Blende muß etwas größer sein als die Meßblende der Standardkammer oder die Blende der klinischen Kammer, um möglichst das gleiche Strahlenfeld auszuschneiden.

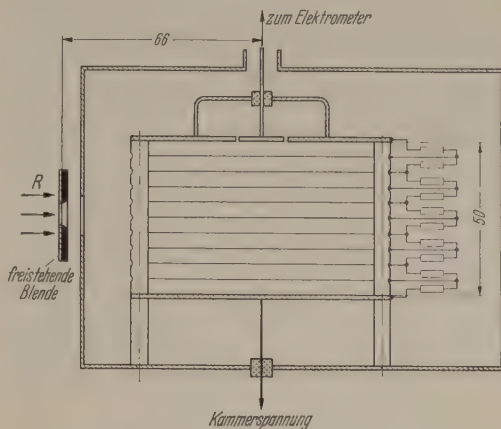


Abb. 2. Weichstrahl-Standardkammer (Plattenkammer) im Schnitt (halbschematisch).

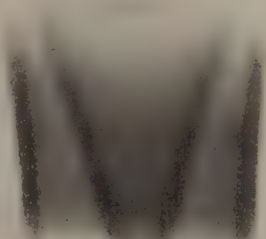


Abb. 3. Lochkameraaufnahme der Brennfleckstrahlung einer Weichstrahlröhre mit Be-Fenster.

b) Die Monitorkammer muß möglichst in der Nähe der Blende der Standardkammer oder der Vergleichskammer stehen, damit alle Spannungsänderungen, die sich als Härteänderungen äußern, mit erfaßt werden. Bei weichen Strahlen und großer Entfernung zwischen Monitorkammer und Standardkammer kann die gleiche Angabe der Monitorkammer bei inzwischen erfolgter Änderung der Härte einen anderen Wert der Standardkammer bedeuten.

c) Die Blenden der Standardkammer und der Vergleichskammer müssen möglichst gleich groß sein.

d) Für alle Kammern muß möglichst die gleiche Meßmethode gewählt werden, vor allen Dingen soll über gleiche oder nahezu gleiche Zeitabläufe beobachtet werden.

e) Die Luftschwächung muß bei sehr weichen Strahlen für jede Messung neu bestimmt werden, was mit einer Meßanlage mit feststehender Blende und beweglichem Meßsystem leicht möglich ist.

Unter Berücksichtigung all der genannten Voraussetzungen wurde der Anschluß der beiden Kammer-
typen bei 33 und 52 kV vorgenommen, wobei die Röntgenstrahlung das eine Mal durch eine Siemens-Tiefen-
therapieröhre in Öl, das andere Mal durch eine Weich-
strahlröhre mit Berylliumfenster erzeugt wurde. In
beiden Fällen wurde kontinuierlich konstante Gleich-
spannung benutzt. Die Meßanordnung beim Vergleich
der Plattenkammer mit der Faßkammer zeigt schema-
tisch Abb. 4.

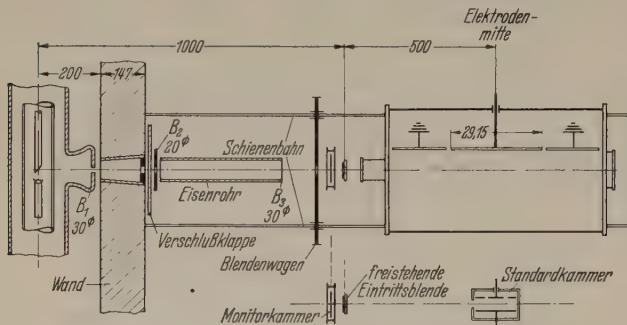


Abb. 4. Meßanordnung beim Vergleich der Plattenkammer mit der Faßkammer.

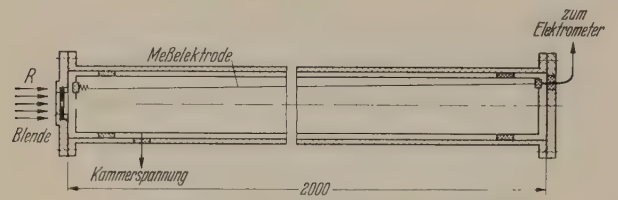


Abb. 5. WILHELMY-Kammer im Schnitt (halbschematisch).

Dadurch, daß beide Röntgenanlagen mit dem glei-
chen Schienensystem ausgestattet waren, konnten die
beiden Kammer-typen wechselweise an beiden Röntgen-
anlagen durchgemessen werden, wobei also der
Röhrentyp und damit die Strahlenverteilung sowie
auch der Meßkammertyp gegenseitig vertauscht wer-
den konnten. Daß trotz dieser ganz verschiedenen
Meßbedingungen die Übereinstimmung so gut ausfiel,
wie es in der Tabelle 1 in einem Beispiel gezeigt ist, be-
weist, daß es gelungen ist, der Absolutbestimmung der
Röntgeneinheit einen hohen Grad von Sicherheit zu
geben.

Tabelle 1.

Vergleich der Plattenkammer WK (für Grenz- und Weichstrahlung) mit der Faßkammer FK (für Strahlung bis
200 kV) chronologisch geordnet. AC bedeutet Kompensation nach HARTSHORN, AU bedeutet Kompensation
nach TOWNSEND, HK bedeutet HARMS-Kondensator.

Rö Spg. kK	Rö- strom mA	Ges.-filter mm	HWS mm Al	FA cm	Blenden-Ø mm	Meßmethode	$\overline{DWK}/\overline{DFK}^*$
52	12	3 Al	1,6	100	4,07	AC; 2 verschied. Harmskondens.	0,999 0,997
33	15	1 B — 0,5 Al	0,45	60	2,9 4,07	AU; (HK) ₂ , 302 pF AU; (HK) ₁ , 250 pF AU; (HK) ₁ , 337 pF AC; (HK) ₁	0,990 0,989 0,993 0,993
52	12	3 Al	1,6	100	4,07 5,57 4,07	AU; (HK) ₂ , 138 pF	0,991 0,992 0,994 0,992
Mittelwert = 0,993 ± 0,002							

* \overline{D} Dosis bezogen auf 1 Skalenteil Monitor-Kammer.

Um noch eine weitere Kontrollmöglichkeit
haben, die besonders dem weichen Strahlengebiet
gepaßt ist, wurde auf die Methode der Totalabsorp-
tion nach dem Vorbild von WILHELMY zurückgegrif-
fen. Den einfachen schematischen Aufbau der WILHELMY-
Kammer zeigt Abb. 5.

Die äußere Ansicht der Meßanordnung mit WILHELMY-Kammer ist aus Abb. 6 zu ersehen.

Unser Modell hat eine Länge von 2 m. Für
Totalabsorption bis auf 1 bis 2% sind folgende un-
gefähr Längen erforderlich: Für 5 kV 60 cm, für 6
1 m, für 8 kV 2 m, für 10 kV 3 m. Wie die Berücksi-
tigung der letzten Prozente erfolgt, wird an ande-
rer Stelle gezeigt.

Ist J die durch die WILHELMY-Kammer gemessene
Intensität der Röntgenstrahlung und L die Länge
der Kammer, so gilt für die Dosis in r unter der Vora-
setzung $\mu L \gg 1$

$$D_r = J \cdot \frac{\mu}{\rho}$$

Hierbei ist zu beachten, daß bei heterogener Strahlung
für μ nicht der Koeffizient der Dosis-schwächung, sondern

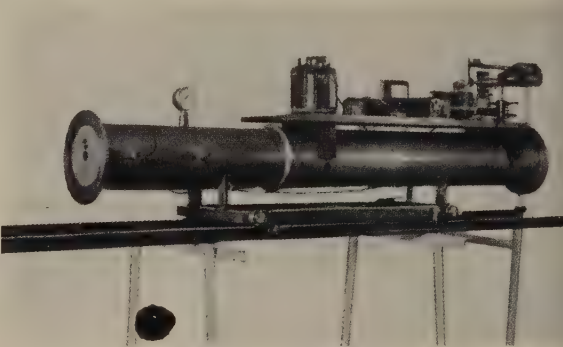


Abb. 6. Meßanordnung mit WILHELMY-Kammer.

der Koeffizient der Energie-Schwächung ein-
gesetzt werden muß, der wiederum mit der WILHELMY-
Kammer selbst bestimmt werden kann (siehe
JAEGER 1935).

Bei allen Messungen mit der WILHELMY-Kammer
ergab sich ein um einige Promille größerer Wert als

mit der Weichstrahlkammer. Er entspricht schätzungsweise
gerade dem Betrag, der aus den Streustrahlensatz
der WILHELMY-Kammer zurückzuführen ist.

Überblickt man die angeführten Messungen, so
geben sie, daß man für das Gebiet zwischen 30 und 200 kV
bei größeren Abmessungen der Kammer selbstverständ-
lich auch noch weit darüber hinaus sowohl eine Faß- wie eine Plattenkammer verwenden
kann. Die Erfahrungen sprechen aber dafür zu sprechen, daß man für ganz weiche
Strahlen der WILHELMY-Kammer als Standardkammer den Vorzug geben sollte. Die
Gründe dafür sind u. a. die folgenden:

a) Die Schwierigkeiten bei der Ausgestaltung des Elektroden systems mit einer genügend kurzen Meßelektrode fallen bei der WILHELMY-Kammer fort. Im weitesten Teil des Grenzstrahlengebietes erhält die WILHELMY-Kammer bereits handliche Längen.

b) Die WILHELMY-Methode bietet durch die Möglichkeit, den Argon-Sprung durch Ersatz der Luft durch ein anderes Filtermaterial zu umgehen, ausgeprochene Vorteile. Auf diesen Punkt wird hier nicht näher eingegangen. Er wird in der ausführlichen Veröffentlichung erläutert.

Das Gesamtergebnis der beschriebenen Messungen läßt den Schluß zu, daß mit den Standardanlagen für Grenzstrahlung, Weichstrahlung und Tiefentherapie strahlung im Institut Ockstadt der Absolutwert des internationalen Röntgen in dem Gebiet zwischen 5 und 200 kV im Mittel unter sorgfältigster Berücksichtigung sämtlicher Fehlerquellen auf etwa $\pm 0,7\%$ realisiert werden kann.

Zusammenfassung.

Im Institut Ockstadt des Max-Planck-Instituts für Biophysik, Frankfurt a. M., wurde in einer Gemeinschaftsarbeit der Herren RAJEWSKY, BUNDE, DORNREICH, JAEGER, LANG, POHLIT und SEWKER nachgewiesen, daß an den beiden Standardanlagen für Grenz- und Weichstrahldosimetrie wie für Hartstrahl-

dosimetrie die Absolutbestimmung des internationalen Röntgen bei sorgfältiger Berücksichtigung sämtlicher Fehlerquellen auf etwa $\pm 0,7\%$ mit zylindrischen Kammern oder Parallelplattenkammern realisiert werden kann. Bei Grenzstrahlen erwies sich die WILHELMY-Kammer mit Messung der Totalabsorption als besonders vorteilhaft. Sie läßt sich durch eine integrierende Messung mit einer kleinen Weichstrahlkammer für Qualitäten von 10–15 kV ersetzen, bei denen die WILHELMY-Kammer sehr lang werden würde.

Herrn Dr. SEIFERT, Hamburg, wird für die Überlassung einer Weichstrahlröhre mit Berylliumfenster bestens gedankt, ebenso der *Deutschen Forschungsgemeinschaft*, welche die Untersuchungen durch ein Stipendium unterstützte.

Ausführliche Veröffentlichungen erfolgen in der Strahlentherapie und der Zeitschrift für Naturforschung.

Literatur. [1] RAJEWSKY, B., R. JAEGER, E. BUNDE u. A. SEWKOR: Grundsätzliche Untersuchungen zur Standard-Dosimetrie (im Druck). — [2] JAEGER, R.: Physikalische Z. **35**, 665, (1934). — [3] JAEGER, R.: Physikalische Z. **36**, 41 (1935). — [4] JAEGER, R.: Strahlentherapie **89**, 481 (1953). — [5] OOSTERKAMP, W. J.: Applied Scientific Research B **3**, 100 (1953). — [6] TAYLOR, L. S.: Strahlentherapie **89**, 1 (1952), Übersetzung aus Brit. J. Radiol. **24**, 67 (1951).

Oberregierungsrat Dr. ROBERT JAEGER,
Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Braunschweig.

Temperaturmessung an Schleiffunken.

Von W. RIEZLER und L. HARDT.

Mit 3 Textabbildungen.

(Eingegangen am 15. März 1954.)

Schleiffunken entstehen beim Andrücken eines Stahlstabes gegen eine schnell rotierende Schleife. Infolge der Reibungswärme geraten die abgerissenen Stahlteilchen in einen glühenden Zustand. Sie verbrennen, wenn ihr Zündpunkt erreicht wird. Betrachtet man den erkalteten Funkenstaub unter dem Mikroskop, so sieht man neben spiralförmigen Spänen sehr viele kugelförmige Partikelchen, die geschmolzen sind und je nach der Zusammensetzung des Stahles ganz oder teilweise zu Oxyd verbrannt sind.

Wegen der hohen Geschwindigkeit und geringen Größe der Funken entfallen zur Temperaturmessung alle subjektiven Methoden, insbesondere solche mit den üblichen Glüh- und Farbpyrometern.

Die hier benutzte Methode hat sich auch bei umfangreichen Reihenuntersuchungen als sehr brauchbar erwiesen. Sie macht die Voraussetzung, daß die Funken grau strahlen. Dies trifft für Stahlfunken mit guter Annäherung zu, nicht dagegen für Funken von starken Selektivstrahlern, wie zum Beispiel von Cer-Eisen.

Bei der Entwicklung dieser Methode wurde angenommen, daß zwar das absolute Emissionsvermögen der Stahlfunken unbekannt ist, man die Funken aber doch mit guter Annäherung als Graustrahler betrachten darf.

Beim Graustrahler ist das Emissionsvermögen für zwei verschiedene Wellenlängen λ_1 und λ_2 gleich. Wir setzen also

$$\frac{\varepsilon(\lambda_1, T)}{\varepsilon(\lambda_2, T)} \approx 1.$$

Ein Schema der Apparatur ist in Abbildung 1 dargestellt.

Man blendet einen Funken F (senkrecht zur Zeichenebene) aus einem Funkenbüschel aus und bildet

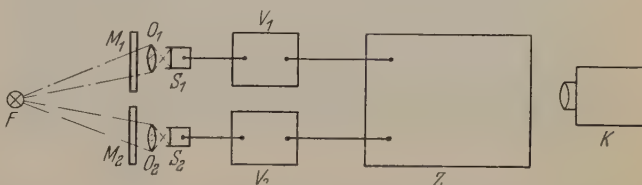


Abb. 1. Schematische Anordnung der Apparatur.

ihn durch zwei Objektive O_1 und O_2 auf je einen Sekundärelektronenvervielfacher S_1 und S_2 verkleinert ab. Die Abbildung muß etwas unscharf sein, da verschiedene Stellen der Photokathoden der Vervielfacher oft etwas unterschiedliche Empfindlichkeit haben. Vorden Objektiven sitzen zwei verschiedene Metall-Interferenzfilter M_1 und M_2 (Schwerpunktswellenlängen $\lambda_1 = 797 m\mu$, $\lambda_2 = 601 m\mu$), so daß jeder Vervielfacher Funkenlicht verschiedener Wellenlänge erhält. Die Vervielfacher sind an zwei Breitbandverstärker V_1 und V_2 angeschlossen, deren Ausgänge zu je einem System eines Zweistrahloszillographen Z führen. Ein an den Vervielfachern vorbeifliegender Funken verursacht — entsprechend seiner Temperatur bzw. der Lage seines Strahlungsmaximums in der Strahlungskurve — wegen der verschiedenfarbigen Filter an den beiden Systemen des Oszillographen verschieden hohe Ab-

lenkungen der Kathodenstrahlen. Der Zweistrahloszillograph ist mit Dunkelsteuerung und Bereitschaftsschaltung versehen, wodurch die Aufnahme der Oszillogramme mit der automatischen Kamera K und ihre Auswertung bedeutend vereinfacht wird.

Das abgebildete Bahnstück eines Funkens erscheint am Oszillographen als zwei Kurven unterschiedlicher Amplitude (Abb. 2 und 3). Aus dem Amplitudenverhältnis zweier entsprechender Stellen eines Oszillogrammes kann nun folgendermaßen auf die Funkentemperatur an dieser Stelle geschlossen werden.

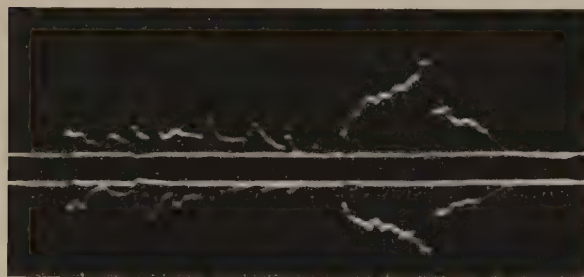


Abb. 2. Funkenoszillogramm eines Kohlenstoffstahles ($C = 0,82\%$).

Der Kathodenstrahlauschlag h am Oszillographen ist eine Funktion der Temperatur T und der strahlenden Fläche F eines Funkens, $h = h(T, F)$.

Die Strahlungsintensität pro Flächeneinheit $I'(\lambda, T)$ ergibt sich aus der des schwarzen Körpers $I(\lambda, T)$ zu

$$I'(\lambda, T) = \varepsilon(\lambda, T) \cdot I(\lambda, T). \quad (1)$$

Da beim Graustrahler das Emissionsvermögen ε von der Wellenlänge λ unabhängig ist, wird das Intensitätsverhältnis für zwei verschiedene Wellenlängen λ_1 und λ_2

$$I' = \frac{I'_1}{I'_2} = \frac{I_1}{I_2} \quad (2)$$

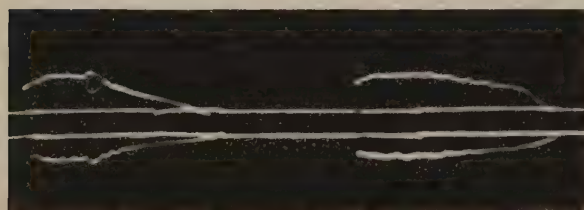


Abb. 3. Funkenoszillogramm eines Wolframstahles ($W = 9,50\%$).

gleich dem des schwarzen Körpers bei der gleichen Temperatur T . Die Indizes 1 und 2 beziehen sich auf die Wellenlängen λ_1 und λ_2 . Es gilt

$$h_1 = \alpha \cdot I'_1 \cdot F, \quad h_2 = \beta \cdot I'_2 \cdot F \quad (3)$$

und

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{I'_1}{I'_2} = \gamma \cdot \frac{I'_1}{I'_2} = \gamma \cdot \frac{I_1}{I_2}. \quad (4)$$

α , β und γ sind vom Apparat abhängige Proportionalitätsfaktoren. Maßgebend für die Größe von $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$ sind die verschiedenen Empfindlichkeiten der Sekundärelektronenvervielfacher, die Art der Abbildung der Funken auf die Photokathoden der Vervielfacher, die Eigenschaften der Filter und die Verstärkungsfaktoren der Breitbandverstärker.

Man kann γ empirisch mit einer geeichten Wolframbandlampe bestimmen, für die entsprechendes gilt wie für die Funken. Der Index B gelte im folgenden

für die Bandlampe, der Index F für die Funken. Ist mit bekannten Bezeichnungen

$$\frac{I_1 B'}{I_2 B'} = \frac{\varepsilon_1 \cdot I_1}{\varepsilon_2 \cdot I_2}$$

und entsprechend Gl. (4)

$$\left(\frac{h_1}{h_2}\right)_B = \gamma \cdot \frac{I_1 B'}{I_2 B'} = \gamma \cdot \frac{\varepsilon_1 \cdot I_1}{\varepsilon_2 \cdot I_2}$$

also

$$\gamma = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)_B \cdot \frac{\varepsilon_2 \cdot I_2}{\varepsilon_1 \cdot I_1}.$$

Aus den Gl. (4) und (7) folgt dann

$$\left(\frac{h_1}{h_2}\right)_F = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)_B \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}.$$

ε_1 und ε_2 sind die Emissionsvermögen für Wolfram bei den Wellenlängen λ_1 und λ_2 , deren Werte aus Tabellen entnommen werden können.

Die Bandlampe wird unter gleichen Bedingungen wie die Funken auf die Photokathoden der beiden Vervielfacher abgebildet. Es darf aber nur der mittlere Teil des Bandes durch Vorsatz von Blenden zur Abbildung gebracht werden, da nur für diesen Teil die auf dem Eichschein angegebene schwarze Temperatur wirklich zutrifft.

Die Eichung der Bandlampe wurde mit einem empfindlichen Mikropyrometer nachkontrolliert, und der Übergang von der schwarzen Temperatur zu wahren erfolgte mit Hilfe von Tabellen und Diagrammen (1; 2). Mittels eines Photoverschlusses wurden Lichtblitze der Bandlampe auf die Photokathoden der Vervielfacher gegeben und die Amplitudenverhältnisse für viele Temperaturen aus den Oszillogrammen abgelesen. Man erhält so ein Diagramm, in dem als Abszissen die Temperaturen, als Ordinaten die zugehörigen Amplitudenverhältnisse aufgetragen sind. Bringt man nun noch für jede Temperatur die Korrektur $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ für Wolfram an (Gl. (8)), so kann man dieses Diagramm unmittelbar zur Bestimmung der Funkentemperaturen verwenden.

Die Genauigkeit des Verfahrens wurde mit Kohlenfadenlampen bekannter Temperaturen überprüft. Der Fehler war bei $1520^\circ\text{C} \pm 25^\circ\text{C}$ und bei $1750^\circ\text{C} \pm 35^\circ\text{C}$, also $1,6 - 2\%$.

Bei Wolfram würde die Annahme einer grauen Strahlung bei 1700°K und $\lambda_1 = 800\text{ m}\mu$, $\lambda_2 = 600\text{ m}\mu$ einen Fehler von $+30^\circ$, also etwa 2% bedeuten, bei $2100^\circ\text{K} + 45^\circ$.

Die Abb. 2 und 3 zeigen charakteristische Funkenoszillogramme. Der Unterschied für verschiedenen Stahlarten ist beträchtlich. Beim unlegierten Kohlenstoffstahl (Abb. 2, $C = 0,82\%$) treten sehr starke Amplitudenänderungen mit hohen Spitzen auf. Sie werden durch die sog. „Kohlenstoffsternchen“ hervorgerufen, und zwar einmal wegen eines Temperaturanstieges, dann aber auch wegen der Vergrößerung der strahlenden Oberfläche infolge Auseinanderplatzen eines Funkens in mehrere Splitter. Beim Wolframstahl (Abb. 3, $W = 9,50\%$) ist die Sternchenbildung nicht so stark, der Kurvenverlauf dementsprechend viel glatter.

Es wurden 7 unlegierte und 7 legierte Stähle untersucht, und zwar wurde für jede Stahlart eine große Anzahl

ahl von Oszillogrammen für mehrere Stellen der Funkenbahnen gemacht, die statistisch ausgewertet wurden. Die Ergebnisse sind kurz folgende:

1. Bei allen Stählen steigt der Temperaturmittelwert zunächst mit der Entfernung von der Schleifscheibe an, um nach größeren Abständen hin abzunehmen. Die mittlere Größe der von der Schleifscheibe abgesprengten Teilchen ist umso größer, je größer der Abstand von der Scheibe ist, da die größeren Teilchen weiterfliegen. Kleinere Teilchen haben also eine höhere Temperatur als große. Das ist leicht einzusehen, da ein kleines Stahlteilchen gegenüber einem großen einen Verhältnis zum Volumen bedeutend größere Oberfläche hat. Der Luftsauerstoff kann das Teilchen also intensiver und vollständiger verbrennen.

2. Bei den unlegierten Kohlenstoffstählen steigt der Temperaturmittelwert mit wachsendem Kohlenstoffgehalt, normale Verarbeitungsbedingungen der Stähle vorausgesetzt.

3. Die meisten Legierungselemente setzen die Funkentemperaturen herab, zum Teil ganz erheblich. Besonders stark ist der Einfluß von Wolfram.

Die folgenden beiden Tabellen geben die mittlere Funkentemperaturen T (in °C) für einige untersuchte Stahlsorten (alle gehärtet) im Abstand 20 cm von der Mitte der Schleifscheibe an. Es wurde eine Schmirlscheibe aus Edeldorund (Körnung 36, Härtegrad M , Durchmesser 125 mm) und ein Motor mit 2800 Umdrehungen pro Minute benutzt.

Tabelle 1. Unlegierte C-Stähle.

C %	Si %	Mn %	T (°C)
0,10	0,20	0,40	1640
0,58	0,18	0,72	1660
0,82	0,23	0,18	1720
1,00	0,18	0,19	1740

Tabelle 2. Legierte Stähle.

C %	Si %	Mn %	Cr %	Mo %	W %	V %	Co %	T (°C)
1,09	—	12,0	—	—	—	—	—	1720
2,0	—	—	12,0	—	—	—	—	1620
0,96	0,20	0,25	4,30	2,70	2,90	2,40	—	1510
0,80	0,20	0,25	4,30	0,90	9,50	1,60	—	1400
0,70	—	—	4,14	—	18,88	1,60	2,64	1220

Folgende beiden Tatsachen bieten die Möglichkeit, die Meßergebnisse zu überprüfen:

1. Der Schmelzpunkt der untersuchten Stähle (1450—1500 °C) wird von sehr vielen Funkenpartikeln erreicht (Schmelzkügelchen).

2. Viele der zu Kügelchen geschmolzenen heißen Stahlteilchen erweichen beim Auftreffen Quarzglas und Quarzkristalle an der Oberfläche und hinterlassen dort kleine Eindellungen. Ihre Temperatur muß also beträchtlich über dem Erweichungspunkt von Quarz (ca. 1700 °C) liegen.

Eine quantitative Überprüfung stand in guter Übereinstimmung mit den gemessenen Temperaturen.

Zusammenfassung.

Es wird eine neue Methode zur Bestimmung von Funkentemperaturen entwickelt. Sie beruht darauf, daß das Funkenlicht gleichzeitig auf zwei Sekundärelektronenvervielfacher gegeben wird, die auf verschiedene Wellenlängenbereiche ansprechen. Aus dem gemessenen Intensitätsverhältnis läßt sich unter der meist zutreffenden Voraussetzung, daß die Funken Graustrahler sind, die Temperatur der Funken ermitteln.

Literatur. [1] ESPE, W., u. W. KNOLL: Werkstoffkunde der Hochvakuumtechnik. Berlin 1936. — [2] KNOLL, M., F. OLLENDORF u. R. ROMPE: Gasentladungstabellen. Berlin 1935.

Prof. Dr. W. RIEZLER und Dr. L. HARDT,
Institut für Strahlen- und Kernphysik der Universität Bonn.

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Pyramiden-Trichter.

Von GERHARD PIEFKE.

Mit 7 Textabbildungen.

(Eingegangen am 12. Januar 1954.)

Einleitung.

Bei dm- und cm-Wellen werden als Antennen zur Erzielung einer scharfen Bündelung vielfach Hornstrahler in Verbindung mit Linsen oder Paraboloiden verwendet. Diese Hornstrahler haben einen maßgebenden Einfluß auf die Anpassung der Antenne zum Sender und auf die Form der Richtdiagramme. Der Grund hierfür liegt in der Entstehung und der Ausbreitung der Wellentypen im Hornstrahler. Während für die Entstehung und die Art der Wellentypen die Form der Anregung maßgebend ist, ergibt sich die Ausbreitung der einzelnen Wellentypen aus der Form des Hornstrahlers. Diese Ausbreitung soll hier untersucht werden.

Der runde Trichter wurde schon in [1] und [2] genügend betrachtet. In der Praxis wird jedoch am häufigsten der quadratische Pyramiden-Trichter (Abb. 1) verwendet, denn dieser ist die gegebene Fortsetzung eines Rechteck-Hohlleiters und außerdem wegen der ebenen Seitenwände leicht herzustellen. Die Anre-

gung geschieht hier meistens durch die H_{10} -Welle eines Rechteck-Hohlleiters. Es soll daher besonders die Welle im Trichter untersucht werden, welche der H_{10} -Welle entspricht. Da nun kein orthogonales Koordinatensystem u, v, w bekannt ist, bei dem Flächen $u = \text{const}$ und Flächen $v = \text{const}$ den Wänden eines Pyramiden-Trichters gleichzusetzen sind, betrachtet man mathematisch den Kugelsektor-Trichter (Abbildung 2). Dieser stellt einen Ausschnitt aus einer Kugel dar. Es können daher die Kugelkoordinaten r, ϑ, φ verwendet werden. Die Wände des Kugelsektor-Trichters werden dann durch Flächen $\vartheta = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ gebildet. Während nun die Flächen $\varphi = \text{const}$ durch Ebenen dargestellt werden, sind die Flächen $\vartheta = \text{const}$ Kegelflächen und daher

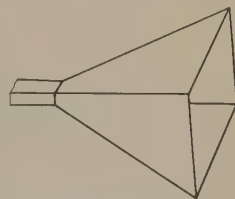


Abb. 1. Der Pyramiden-Trichter mit Speisung durch einen Rechteck-Hohlleiter.

gekrümmt. Die Spitze des Kegels liegt im Nullpunkt des Koordinatensystems.

Der Unterschied des Kugelsektor-Trichters zum Pyramiden-Trichter besteht also in der gekrümmten Fläche $\vartheta = \text{const}$ und außerdem in der gekrümmten Kontur $r_1 = \text{const}$ am Ende des Trichters. Diese Unterschiede werden jedoch zu vernachlässigen sein, wenn die Öffnungswinkel $2\varphi_1$ und $2\vartheta_1^*$ in Abb. 2 genügend klein sind. Beim quadratischen Pyramiden-Trichter ist der Winkel $\vartheta_1^* = \varphi_1$. Es ist daher nötig, den Winkel ϑ_1^* zu bestimmen, bei dem die Berechnung des quadratischen Pyramiden-Trichters nach Kugelkoordinaten für die Praxis zulässig ist.

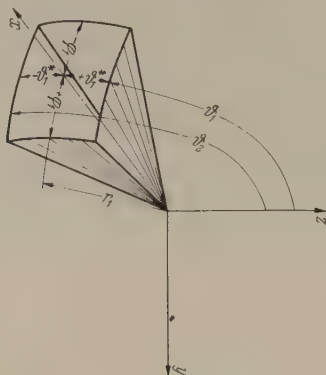


Abb. 2. Kugelsektor-Trichter.

1. Das Prinzip der Lösung für den Trichter.

Die Wellengleichung

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0 \quad (1)$$

mit

$$A = A_r, \quad 0, \quad 0 \quad (2)$$

wird in Kugelkoordinaten gelöst durch die Funktion

$$A = K_\nu''(\cos \vartheta) \cdot \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} (\mu \varphi) \cdot \sqrt{k r} Z_{\nu + \frac{1}{2}}(k r). \quad (3)$$

Hierin bedeuten $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ die Kreiswellenzahl,

$K_\nu''(\cos \vartheta)$ die zugeordneten Kugelfunktionen vom Grade ν und der Ordnung μ ([3] Seite 73) und

$Z_{\nu + \frac{1}{2}}(k r)$ die Zylinderfunktion von der Ordnung $\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$ ([4] Seite 150).

Die H -Wellen ($E_r = 0$) leiten sich aus der Beziehung

$$E = \text{rot } A \quad (4)$$

und die E -Wellen ($H_r = 0$) aus

$$H = \text{rot } A \quad (5)$$

ab.

Die Wellentypen im Kugelsektor-Trichter (Abb. 2) ergeben sich unter Benutzung der MAXWELLSchen Gleichungen $\text{rot } H = j \omega \epsilon_0 E$ und $\text{rot } E = -j \omega \mu_0 H$ nach Einsetzen von (3) in (4) und (5) bei Beachtung der Grenzbedingungen. Diese besagen in unserem Fall, daß die Tangentialkomponente der elektrischen und die Normalkomponente der magnetischen Feldstärke an den Trichterwänden verschwinden müssen. Aus diesen Grenzbedingungen ergeben sich ν und μ , die im allgemeinen bei beliebigen Winkeln φ_1 und ϑ_1^* nicht ganzzahlig sein werden.

2. Der Vergleich zum Hohlleiter und der Unterschied zwischen dem Kugelsektor-Trichter und Pyramiden-Trichter bei den Wellentypen.

Analog zum Rechteck-Hohlleiter gibt es sowohl bei den H - wie auch bei den E -Wellen unendlich viele Wellentypen. Die Indizierung dieser erfolgt dem Hohlleiter entsprechend auf Grund der Feldstärke-Verteilung der r -Komponente in einer Querschnittsfläche. Im Kugelsektor-Trichter ist die r -Komponente jeweils bis auf einen konstanten Faktor ein Produkt aus einer cos- oder sin-Funktion und einer Kugelfunktion. Die trigonometrische Funktion gibt die Abhängigkeit vom Winkel φ an. Verfolgt man den Feldstärke-Verlauf der r -Komponente auf einem Kreisbogen $r = \text{const}$ und $\vartheta = \text{const}$ von $-\varphi_1$ bis $+\varphi_1$, so erhält man also einen sin- oder cos-Verlauf und die Zahl der halben Wellen gibt den zweiten Index m an. Die Kugelfunktion gibt die Abhängigkeit vom Winkel $\vartheta^* = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ an. Verfolgt man den Feldstärke-Verlauf der r -Komponente auf einem Kreisbogen $r = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$ von $-\vartheta_1^*$ bis $+\vartheta_1^*$, so erhält man den Verlauf der betreffenden Kugelfunktion. Die Zahl der „Halbwellen“ gibt den ersten Index n an.

Auch hier ist der niedrigste E -Wellentyp die E_{11} -Welle. Im Gegensatz zum Rechteck-Hohlleiter hat man jedoch im Kugelsektor-Trichter zwar H_{n0} -Wellen mit den 3 Feldkomponenten E_φ , H_ϑ und H_r , aber keine H_{0m} -Wellen, welche hier aus den Feldkomponenten E_ϑ , H_φ und H_r bestehen würden. Der physikalische Grund liegt darin, daß im Kugelsektor-Trichter die Flächen $\vartheta = \text{const}$ im Gegensatz zu $\varphi = \text{const}$ nicht eben und daher beide nicht gleichberechtigt sind. Die Kugelfunktion ist deshalb hier immer eine Funktion von ϑ bzw. ϑ^* .

Im Pyramiden-Trichter dagegen muß man auch H_{0m} -Wellen haben, da hier alle Wände eben sind.

Setzt man nun im Kugelsektor-Trichter $\varphi_1 = \vartheta_1^*$, so geht dieser mit abnehmendem ϑ_1^* in einen quadratischen Pyramiden-Trichter über. Wie im Kapitel 4 gezeigt wird, kann bei kleinem Winkel ϑ_1^* die Kugelfunktion durch eine sin- oder cos-Funktion ersetzt werden. Hierdurch nähert man sich den Gegebenheiten des Pyramiden-Trichters und es treten dann auch die H_{0m} -Wellen auf.

3. Die allgemeinen Eigenschaften der Wellentypen im Nah- und Fernfeld.

Im Gegensatz zum Hohlleiter gibt es keine Grenzwelle im Trichter. In diesem sind Phasenmaß und damit auch Phasengeschwindigkeit durch Zylinderfunktionen bestimmt. Durch deren Näherungen bei kleinen und großen Argumenten — Anhang, Kapitel 1d — bekommt man das Verhalten der elektromagnetischen Wellen im Nah- und Fernfeld.

Bei H - und E -Wellen gilt:

a) Nah- und Fernfeld.

Die transversalen Komponenten der elektrischen Feldstärke sind miteinander in Phase bzw. um π in der Phase verschoben. Dasselbe gilt für die transversalen Komponenten der magnetischen Feldstärke. Bei

¹ Der Ausdruck „Halbwelle“ ist hier analog zur cos- oder sin-Funktion gewählt. Bei den E -Wellen ist die Zahl der „Halbwellen“ im Bereich $-\vartheta_1^*$ bis $+\vartheta_1^*$ identisch mit der Zahl der Extremwerte und bei den H -Wellen mit der Zahl der Nullstellen der Kugelfunktion.

en H -Wellen ist die Longitudinalkomponente H_z , gegen die transversalen Komponenten der elektrischen Feldstärke und bei den E -Wellen die Longitudinalkomponente E_z , gegen die transversalen Komponenten der magnetischen Feldstärke um $\frac{\pi}{2}$ in der Phase verschoben. Die longitudinalen Komponenten wachsen mit ν ($\nu + 1$). ν wiederum wächst mit abnehmendem Winkel ϑ_1^* oder höher werdendem Wellentypus. Bei H -Wellen ($H_z \neq 0$) nehmen daher die Verluste, welche durch die longitudinale Komponente der magnetischen Feldstärke verursacht werden, mit abnehmendem Winkel ϑ_1^* oder wachsendem Wellentypus zu.

b) Fernfeld, d. h. $kr \gg 1$ und $kr \gg \nu + \frac{1}{2}$.

Der Phasenunterschied zwischen den transversalen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke ist praktisch Null. Die Amplituden der transversalen Komponenten nehmen mit $\frac{1}{r}$ und die der longitudinalen Komponenten mit $\frac{1}{r^2}$ ab. Das Phasenmaß ist $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ und daher die Phasengeschwindigkeit gleich der Lichtgeschwindigkeit.

c) Nahfeld, d. h. $kr \ll 1$.

Der Phasenunterschied zwischen den transversalen Komponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke wird mit abnehmendem r immer größer, um schließlich bei $r = 0$ den Wert $\frac{\pi}{2}$ zu erreichen.

Durch jeden Trichterquerschnitt muß die gleiche Energie treten. Diese ist gegeben durch den Realteil des Vektorproduktes aus elektrischer und magnetischer Feldstärke, integriert über den gesamten Querschnitt des Trichters. Je größer der Phasenunterschied zwischen der magnetischen und elektrischen Feldstärke, desto größer müssen daher auch deren Amplituden sein. Diese wachsen dann auch, wie aus den Näherungen hervorgeht, sehr schnell hyperbolisch mit ν als Exponent an. Je höher der Wellentypus oder je kleiner der Winkel ϑ_1^* ist, um so größer werden ν und daher auch die Amplituden der Feldstärken im Nahfeld. Die Phasen der Feldstärken sind im Nahfeld annähernd konstant, d. h. unabhängig von r . Da eine konstante Phase einer unendlichen Wellenlänge entspricht, besteht hier ein Analogon zum Hohlleiter.

Aus der Definition des Fernfeldes ($kr \gg 1$ und $kr \gg \nu + \frac{1}{2}$) folgt, daß dieses um so später beginnt und je größer das Nahfeld umso größer wird, je größer ν ist, d. h. kleiner Winkel ϑ_1^* oder hoher Wellentypus ergeben ein großes Nahfeld.

Die Verluste durch die Trichterwände hängen von der Größe der Amplitude der magnetischen Feldstärke ab. Da diese, wie schon gesagt wurde, im Nahfeld mit dem Wellentypus größer wird, wächst mit diesem auch die Dämpfung. Wenn also bei der Speisung des Trichters Wellentypen hoher Ordnung auftreten, so werden diese infolge der großen Amplitude im Nahfeld stark gedämpft. Ebenso wächst bei abnehmendem Winkel ϑ_1^* infolge zunehmendem ν und daher zunehmender Amplitude der magnetischen Feldstärke die Dämpfung im Nahfeld.

Im Kugelsektor-Trichter sind alle Wellen Kugelfunktionen, d. h. Flächen gleicher Phase sind Teile einer Kugelfläche. Als theoretischer Ursprung aller

Wellen muß die Spitze des Trichters angesehen werden. Diese muß daher im Brennpunkt des Paraboloids liegen, wenn man diesen durch den Trichter anstrahlt, um eine ebene Wellenfront zu erzeugen. Im Nahfeld wächst analog zum Hohlleiter die Phasengeschwindigkeit mit dem Wellentypus.

Durch Überlagerung verschiedener Wellentypen und durch geeignete Dimensionierung und Anregung des Trichters kann man jede beliebige Amplitudenverteilung bei einer Wellenfront schaffen. Dieser theoretischen Überlegung setzt jedoch die Praxis in Form der oben erwähnten stark ansteigenden Verluste bei höheren Wellentypen eine Grenze.

4. Die Näherung für kleine Öffnungswinkel ϑ_1^* .

Für die praktische Auswertung sind die Kugelfunktionen sehr umständlich, da bei beliebigen Winkeln φ_1 und ϑ_1^* die Zahlen ν und μ nicht ganz sein werden. Während sich μ wegen der Grenzbedingungen bei $\varphi = \pm \varphi_1$ aus der Formel

$$\mu = \frac{n\pi}{2\varphi_1}, \quad \begin{array}{l} m = 0, 1, 2, 3 \dots \text{ bei } H\text{-Wellen} \\ m = 1, 2, 3 \dots \text{ bei } E\text{-Wellen} \end{array} \quad (6)$$

sehr leicht bestimmen läßt, wird die Errechnung von ν sehr schwierig. Wie nun nach [2] im Anhang bei der Differentialgleichung für die Kugelfunktionen gezeigt wird, kann man diese bei kleinem Winkel ϑ_1^* durch die sin- oder cos-Funktion ersetzen.

$$K_\nu^\mu(\cos \vartheta) \approx \frac{\sin}{\cos} \left\{ \frac{n\pi}{2\vartheta_1^*} \vartheta \right\} \quad (7)$$

für $\vartheta_1^* \rightarrow 0$

$n = 0, 1, 2, 3 \dots$ bei H -Wellen

$n = 1, 2, 3 \dots$ bei E -Wellen

Mit der Näherung (7) berechnet sich dann ν aus der Formel

$$\nu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{4} \left[\left(\frac{n}{\vartheta_1^*} \right)^2 + \left(\frac{m}{\varphi_1} \right)^2 \right]} \quad (8)$$

$n, m = 0, 1, 2, 3, \dots$ bei H -Wellen,
jedoch niemals $n = m = 0$

$n, m = 1, 2, 3, \dots$ bei E -Wellen.

Bei Anwendung von (7) hat man in Bezug auf die Wellentypen das vollkommene Analogon zum Rechteck-Hohlleiter, denn mit $n = 0$ sind jetzt auch H_{0m} -Wellen möglich. Die Abhängigkeit der Feldstärken von ϑ^* entspricht jetzt der von φ .

Im allgemeinen wird man Trichter verwenden, bei denen $\vartheta_1^* = \varphi_1$ ist. Bei der Näherung (7) sind dann die Flächen $\vartheta^* = \vartheta_1^*$ und $\varphi = \varphi_1$ gleichberechtigt, d. h. vertauschbar. Das bedeutet, daß bei dem Winkel ϑ_1^* , bei welchem (7) verwendet werden darf, die Fläche $\vartheta^* = \vartheta_1^*$ unter der Bedingung $\vartheta_1^* = \varphi_1$ auch als eben aufgefaßt werden kann. Man kann dann in der Praxis den Kugelsektor-Trichter durch den Pyramiden-Trichter ersetzen. Bei diesem werden die Flächen gleicher Phase nicht Teile einer Kugelfläche sein. Jedoch wird der Fehler nicht größer sein als der, welcher bei der Näherung (7) am Felddbild im Kugelsektor-Trichter entsteht.

5. Das Felddbild der H_{10} -Welle und die Prüfung der

$$\text{Näherung } K_\nu^\mu(\cos \vartheta) = \frac{\sin}{\cos} \left\{ \frac{n\pi}{2\vartheta_1^*} \vartheta \right\}.$$

Wie im Anhang gezeigt wird, ergibt sich bei der in

Richtung fortschreitenden H_{10} -Welle mit der Näherung

$$K_\nu^0(\cos \vartheta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*}\right) \quad (9)$$

im Fernfeld

$$\left. \begin{aligned} E_r &= E_\theta = E_\varphi = 0 \\ E_\varphi &= C \frac{\pi}{2 \vartheta_1^* r} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*}\right) \cdot e^{-j(kr - \omega t)} \\ H_r &= C \frac{k \nu(\nu+1)}{Z_0 (kr)^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*}\right) \cdot e^{-j(kr - \omega t - \frac{\pi}{2})} \\ H_\theta &= -C \frac{\pi}{Z_0 2 \vartheta_1^* r} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*}\right) \cdot e^{-j(kr - \omega t)} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

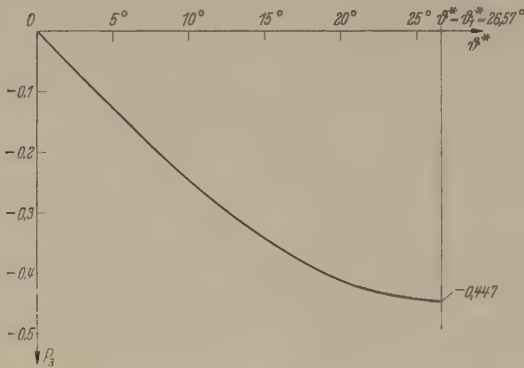


Abb. 3. Der Verlauf der Kugelfunktion $P_2(\cos \vartheta)$ in Abhängigkeit von $\vartheta^* = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ im Bereich $\vartheta^* = 0 \dots \vartheta_1^*$. ($\vartheta_1^* = 26,57^\circ$).

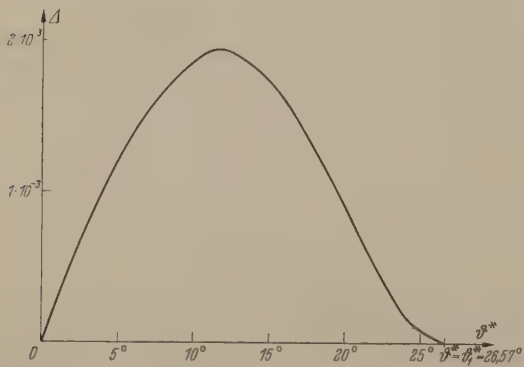


Abb. 4. Der Fehler $\Delta = |P_2(\sin \vartheta^*) - 0,447 \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*}\right)|$ in Abhängigkeit von $\vartheta^* = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ im Bereich $\vartheta^* = 0 \dots \vartheta_1^*$. ($\vartheta_1^* = 26,57^\circ$).

Hierbei ist C eine Konstante,

$$Z_0 = 377 \Omega, k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

und

$$\nu = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\vartheta_1^*}\right)^2}. \quad (11)$$

Abb. 4 zeigt bei einem Winkel $\vartheta_1^* = 26,57^\circ$ die Abweichung der Näherung (9) von der exakten Lösung im Kugelsektor-Trichter, die in Abb. 3 aufgezeichnet wurde. Der Fehler ist so gering — relativer Fehler immer kleiner als 1%, — daß er vernachlässigt werden kann.

Für den Winkel $\vartheta_1^* = 26,57^\circ$ zeigen die Abb. 5a und 5b in einer Ebene $\varphi = \text{const}$ die magnetischen und elektrischen Feldlinien zu den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = \frac{\tau}{4}$, wobei $\tau = \frac{1}{f}$ ($f = \text{Frequenz}$) ist. Das Feldbild entspricht der H_{10} -Welle im Rechteck-Hohl-

leiter. Die elektrischen Feldlinien stehen hier senkrecht zur Zeichenebene. Die Abnahme der elektrischen Feldstärke E von $\vartheta^* = 0$ bis $\pm \vartheta_1^*$ ist durch den Abstand der Punkte längs des Kreisbogens $r = \text{const}$ gekennzeichnet. Bei $\vartheta^* = \pm \vartheta_1^*$ ist die elektrische Feldstärke Null. Den Abstand der elektrischen Feldstärke

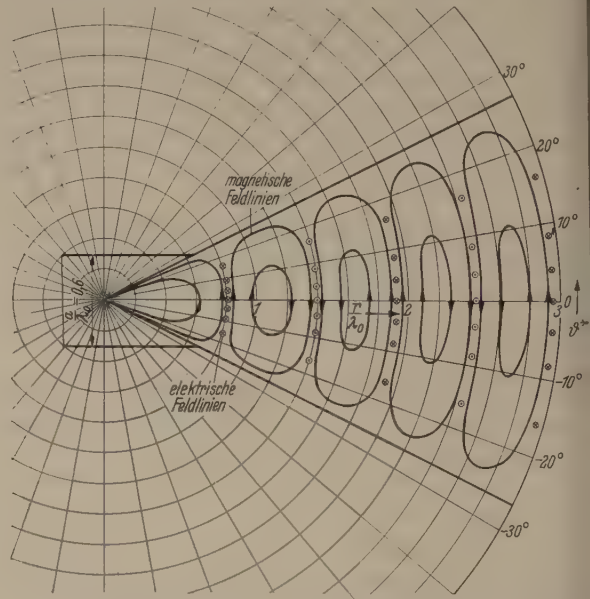


Abb. 5a. Die magnetischen u. elektrischen Feldlinien bei der H_{10} -Welle zur Zeit $t = 0$. Öffnungswinkel des Trichters $2 \vartheta_1^* = 2 \cdot 26,57^\circ$.

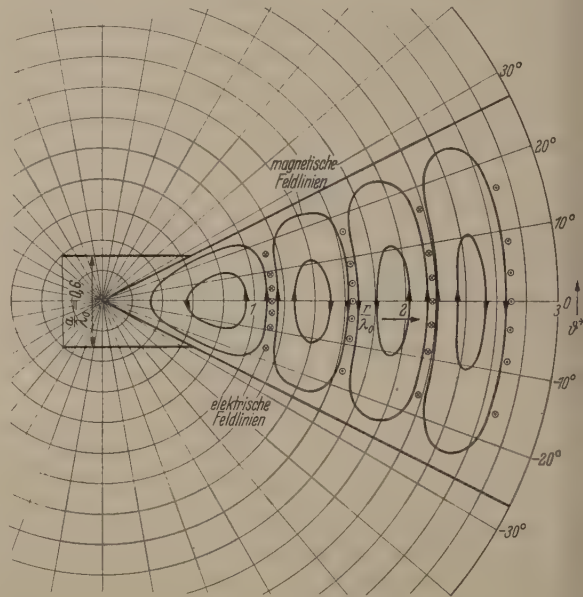


Abb. 5b. Die magnetischen und elektrischen Feldlinien bei der H_{10} -Welle Zeit $t = \frac{\tau}{4}$ ($\tau = \frac{1}{f}$; $f = \text{Frequenz}$). Öffnungswinkel des Trichters $2 \vartheta_1^* = 2 \cdot 26,57^\circ$.

gleicher Phase in einer Ebene $\vartheta^* = \text{const}$ kann man als Wellenlänge bezeichnen. Diese Wellenlänge nimmt zur Trichterspitze hin zu. Die magnetischen Feldlinien werden durch die Komponenten H_θ und H_φ gebildet. Für die Phasenlage der einzelnen Komponenten im Nah- und Fernfeld gelten die in Kapitel angegebenen Beziehungen. Während in Abb. 5a an der Trichterspitze ein magnetisches Feldlinienbild hängt, hat sich dieses in Abb. 5b von der Trichterspitze abgelöst.

Da der Trichter meist von einem Rechteck-Hohlleiter gespeist wird, wurde dieser mit einer der Praxis entsprechenden relativen Abmessung $\frac{a}{\lambda_0} = 0,6$ eingezeichnet.

Abb. 6 zeigt die Phasen der Feldstärken in Abhängigkeit von $\frac{r}{\lambda_0}$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Für $\frac{r}{\lambda_0} < 0,2$ sind die Phasen praktisch konstant. Die magnetische Feldstärke H_θ ist gegenüber der elektrischen Feldstärke E_φ um annähernd $\frac{\pi}{2}$ verschoben (exakt gilt Phasenverschiebung $\frac{\pi}{2}$ nur bei $\frac{r}{\lambda_0} = 0$). Wäh-

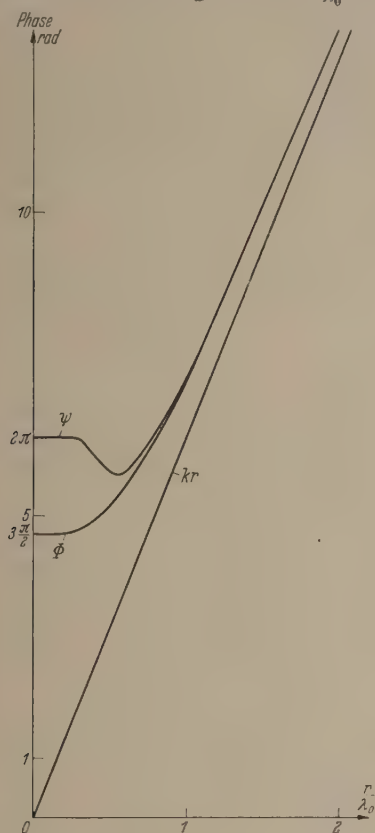


Abb. 6. Die Phasen der Feldkomponenten der H_{10} -Welle in Abhängigkeit von $\frac{r}{\lambda_0}$ zum Zeitpunkt $t = 0$. Öffnungswinkel des Trichters $\vartheta_1^* = 2 \cdot 26,57^\circ$

- Φ = Phase von E_φ ,
- $\left(\Phi - \frac{\pi}{2}\right)$ = Phase von H_r ,
- Ψ = Phase von H_θ , $k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$.

und nun für $\frac{r}{\lambda_0} > 0,2$ die Phase von E_φ immer zunimmt, durchläuft die Phase von H_θ bei $\frac{r}{\lambda_0} \approx 0,56$ ein Minimum, um dann für $\frac{r}{\lambda_0} > 0,56$ immer mehr in die Phase von E_φ überzugehen.

Für $\frac{r}{\lambda_0} > 1$ kann man dann die Phasen von E_φ und H_θ praktisch gleichsetzen. Bei $\frac{r}{\lambda_0} = 2$ beträgt der Unterschied gegenüber kr etwa 2%, so daß hier schon das Nahfeld besteht.

Die Wandströme zeigt Abb. 7. Das Anwachsen der Stromstärke ist zur Trichterspitze hin größer als $\frac{1}{r}$, so daß die Verluste stark ansteigen.

Wie bei der H_{10} -Welle, so entsprechen auch bei den anderen Wellentypen für kleine Winkel $\vartheta_1^* = \varphi_1$ alle Feldbilder denen im Rechteck-Hohlleiter. Bei der

Anregung durch die H_{10} -Welle eines Rechteck-Hohlleiters werden im Trichter neben der H_{10} -Welle als nächsthöhere Wellentypen die H_{30} -, H_{12} - und E_{12} -Welle auftreten.

Anhang.

1. Die Wellentypen in einem Trichter, der durch den Ausschnitt aus einer Kugel dargestellt wird.

a) Die Bestimmung des Potentials A .

Es gilt die Wellengleichung

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0 \quad (1)$$

für Kugelkoordinaten r, ϑ, φ zu lösen. A ist ein Vektor, aus dem durch die Bildung der Rotation die H - und E -Wellen berechnet werden. A hat die Richtung des Radiusvektors:

$$A = A_r, 0, 0 \quad (2)$$

$k = \frac{2\pi}{\lambda_0}$ ist die Kreiswellenzahl.

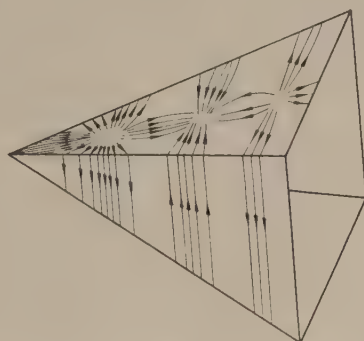


Abb. 7. Die Wandströme bei der H_{10} -Welle. Das Anwachsen der Ströme ist zur Trichterspitze hin größer als $\frac{1}{r}$. Diese Tatsache ist durch Zunahme der Stromlinien gekennzeichnet.

Der Faktor $e^{j\omega t}$ wird hier fortgelassen. Setzt man (2) in (1) ein, so erhält man

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial A}{\partial \vartheta} \right) + k^2 A = 0. \quad (3)$$

Für A wird gesetzt

$$A = f(\vartheta) g(r) h(\varphi). \quad (4)$$

Mit (4) ergibt sich dann aus (3)

$$r^2 \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{h \sin^2 \vartheta} \frac{d^2 h}{d\varphi^2} + \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d\vartheta^2} + \frac{1}{f} \cot \vartheta \frac{df}{d\vartheta} + k^2 r^2 = 0. \quad (5)$$

Der Teilansatz

$$h(\varphi) = \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} (\mu \varphi) \quad (6)$$

ergibt

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{d\varphi^2} = -\mu^2. \quad (7)$$

Aus dem Ansatz

$$\frac{r^2}{g} \frac{d^2 g}{dr^2} + k^2 r^2 = \nu(\nu + 1) \quad (8)$$

ergibt sich nach einigen Umformungen die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 g}{(kr)^2} + \left[1 - \frac{4 \left(\nu + \frac{1}{2} \right)^2 - 1}{4 (kr)^2} \right] g = 0. \quad (9)$$

Nach [4] S. 150 wird diese Gleichung gelöst durch die

Zylinderfunktion

$$g = \sqrt{k r} Z_{\nu + \frac{1}{2}}(k r). \quad (10)$$

Setzt man nun (7) und (8) in (5) ein, so ergibt sich

$$\frac{d^2 f}{d\vartheta^2} + \operatorname{ctg} \vartheta \frac{df}{d\vartheta} + \left[\nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{\sin^2 \vartheta} \right] f = 0. \quad (11)$$

Mit $\xi = \cos \vartheta$ erhält man nach einigen Umformungen aus (11)

$$(\xi^2 - 1) \frac{d^2 f}{d\xi^2} + 2\xi \frac{df}{d\xi} - \left[\nu(\nu + 1) - \frac{\mu^2}{1 - \xi^2} \right] f = 0. \quad (12)$$

Nach [3] Seite 79–81 wird diese Gleichung gelöst durch die zugeordnete Kugelfunktion

$$f = K_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta). \quad (13)$$

Die Lösung (13) ist abhängig von ν und μ und nimmt folgende Formen an:

1. Wenn a) $\nu \pm \mu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
oder b) $\nu, \mu = \pm(0, 1, 2, \dots)$ und $|\nu| \geq |\mu|$ aber
 $\nu + \mu \neq -1, -2, -3, \dots$ ist, gilt

$$K_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta) = C_1 P_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta) + C_2 Q_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta). \quad (13a)$$

2. Wenn $\nu \pm \mu$ eine ganze Zahl, aber $\mu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ist, gilt

$$K_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta) = C_1 P_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta) + C_2 P_{\nu}^{-\mu}(\cos \vartheta). \quad (13b)$$

3. Wenn $\nu, \mu = \pm(0, 1, 2, \dots)$ und $|\nu| < |\mu|$ aber
 $\nu + \mu \neq -1, -2, -3, \dots$ ist, gilt

$$K_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta) = C_1 P_{\nu}^{-\mu}(\cos \vartheta) + C_2 Q_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta). \quad (13c)$$

Setzt man (6), (10) und (13) in (4) ein, so ergibt sich für das Potential

$$A = K_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta) \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\mu \varphi) \cdot \sqrt{k r} Z_{\nu + \frac{1}{2}}(k r). \quad (14)$$

b) Die Berechnung der H-Wellen aus dem Potential A.

Die H-Wellen leiten sich aus der Beziehung

$$E = \operatorname{rot} A \quad (15)$$

ab. Aus (15) gewinnt man sofort die Komponenten der elektrischen Feldstärke als Funktion von A. Nach Einsetzen der elektrischen Feldstärke in die MAXWELLSche Gleichung

$$\operatorname{rot} E = -j \omega \mu_0 H \quad (16)$$

erhält man die Komponenten der magnetischen Feldstärke. Die Ergebnisse sind

$$\left. \begin{aligned} E_r &= 0 \\ E_{\vartheta} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \\ E_{\varphi} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \vartheta} \\ H_r &= \frac{j}{Z_0} \left[k A + \frac{1}{k} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \right] \\ H_{\vartheta} &= \frac{j}{Z_0} \frac{1}{k r} \frac{\partial^2 A}{\partial r \partial \vartheta} \\ H_{\varphi} &= \frac{j}{Z_0} \frac{1}{k r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 A}{\partial r \partial \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

 $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$ ist der Feld-Wellenwiderstand des leeren Raumes.

Nach Einsetzen von (14) in (17) ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= 0 \\ E_{\vartheta} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} K_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta) \frac{d}{d\varphi} \left[\left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\mu \varphi) \right] \\ &\quad \times \sqrt{k r} Z_{\nu + \frac{1}{2}}(k r) \\ E_{\varphi} &= -\frac{1}{r} \frac{d}{d\vartheta} \left[K_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta) \right] \cdot \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\mu \varphi) \\ &\quad \times \sqrt{k r} Z_{\nu + \frac{1}{2}}(k r) \\ H_r &= \frac{j}{Z_0} \frac{k \nu (\nu + 1)}{(k r)^2} K_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta) \cdot \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\mu \varphi) \\ &\quad \times \sqrt{k r} Z_{\nu + \frac{1}{2}}(k r) \\ H_{\vartheta} &= \frac{j}{Z_0} \frac{1}{k r} \frac{d}{d\vartheta} \left[K_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta) \right] \cdot \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\mu \varphi) \\ &\quad \times \frac{d}{dr} \left[\sqrt{k r} Z_{\nu + \frac{1}{2}}(k r) \right] \\ H_{\varphi} &= \frac{j}{Z_0} \frac{1}{k r \sin \vartheta} K_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta) \frac{d}{d\varphi} \left[\left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\mu \varphi) \right] \\ &\quad \times \frac{d}{dr} \left[\sqrt{k r} Z_{\nu + \frac{1}{2}}(k r) \right] \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

c) Die Berechnung der E-Wellen aus dem Potential A.

Die E-Wellen leiten sich aus der Beziehung

$$H = \operatorname{rot} A \quad (19)$$

ab. Aus (19) gewinnt man sofort die Komponenten der magnetischen Feldstärke als Funktion von A. Nach Einsetzen der magnetischen Feldstärke in die MAXWELLSche Gleichung

$$\operatorname{rot} H = j \omega \epsilon_0 E \quad (20)$$

erhält man die Komponenten der elektrischen Feldstärke.

Die Ergebnisse sind:

$$\left. \begin{aligned} H_r &= 0 \\ H_{\vartheta} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A}{\partial \varphi} \\ H_{\varphi} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial \vartheta} \\ E_r &= -j Z_0 \left(k A + \frac{1}{k} \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} \right) \\ E_{\vartheta} &= -j Z_0 \frac{1}{k r} \frac{\partial^2 A}{\partial r \partial \vartheta} \\ E_{\varphi} &= -j Z_0 \frac{1}{k r \sin \vartheta} \frac{\partial^2 A}{\partial r \partial \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Nach Einsetzen von (14) in (21) ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} H_r &= 0 \\ H_{\vartheta} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} K_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta) \frac{d}{d\varphi} \left[\left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\mu \varphi) \right] \\ &\quad \times \sqrt{k r} Z_{\nu + \frac{1}{2}}(k r) \\ H_{\varphi} &= -\frac{1}{r} \frac{d}{d\vartheta} \left[K_{\nu}^{\mu}(\cos \vartheta) \right] \cdot \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\mu \varphi) \\ &\quad \times \sqrt{k r} Z_{\nu + \frac{1}{2}}(k r) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(Forts. d. Formel 22 auf S. 505.)

Forts. d. Formel 22 von S. 504.)

$$\left. \begin{aligned} E_r &= -j Z_0 \frac{k(\nu+1)}{(kr)^2} K_\nu^\mu(\cos \vartheta) \cdot \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\mu \varphi) \\ &\quad \times \sqrt{kr} Z_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \\ E_\vartheta &= -j Z_0 \frac{1}{kr} \frac{d}{d\vartheta} \left[K_\nu^\mu(\cos \vartheta) \cdot \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\mu \varphi) \right] \\ &\quad \times \frac{d}{dr} \left[\sqrt{kr} Z_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \right] \\ E_\varphi &= -j Z_0 \frac{1}{kr \sin \vartheta} K_\nu^\mu(\cos \vartheta) \frac{d}{d\varphi} \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\mu \varphi) \\ &\quad \times \frac{d}{dr} \left[\sqrt{kr} Z_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \right] \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

d) Die Näherung im Nah- und Fernfeld.

In den Gleichungssystemen (18) und (22) ist die Phase bei den einen Feldkomponenten durch die Zylinderfunktion

$$Z_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) = c_1 H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) + c_2 H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \quad (23)$$

und bei den anderen Feldkomponenten durch den Differential-Quotienten

$$\begin{aligned} &\left[\sqrt{kr} Z_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \right] \\ &= k \sqrt{kr} \left[\frac{\nu+1}{kr} Z_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) - Z_{\nu+1+\frac{1}{2}}(kr) \right] \end{aligned} \quad (24)$$

gegeben. Es gilt (23) für

$E_\vartheta, E_\varphi, H_r$ bei der H -Welle
und für $H_\vartheta, H_\varphi, E_r$ bei der E -Welle.

(24) gilt dann für

H_ϑ, H_φ bei der H -Welle
und für E_ϑ, E_φ bei der E -Welle.

$H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr)$ ist die HANKELsche Funktion erster Art von der Ordnung $\left(\nu + \frac{1}{2}\right)$ und gibt eine Welle gegen r .
 $H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)$ ist die HANKELsche Funktion zweiter Art und gibt eine Welle in Richtung r , deren alleinige Betrachtung hier genügt.

Im Fernfeld, d. h. $kr \gg 1$ und $kr \gg \left(\nu + \frac{1}{2}\right)$ gelten die Näherungen [5] Seite 102.

$$H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{kr\pi}} e^{j(\nu+1)\frac{\pi}{2}} e^{-jkr} \quad (25)$$

$$\left[\sqrt{kr} H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right] = -j k \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{j(\nu+1)\frac{\pi}{2}} e^{-jkr} \quad (26)$$

Bei den Näherungen im Nahfeld, d. h. $kr \ll 1$ benutzt man die Beziehung

$$H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) = J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) - j N_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \quad (27)$$

Hierbei bedeuten $J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)$ die BESSELSche und $N_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)$ die NEUMANNsche Funktion. Bei $kr \ll 1$ kann man $J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)$ gegen $N_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)$ vernachlässigen und bekommt dann ([4] Seite 131).

$$H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) = -j N_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) = j \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)!}{\pi} \left(\frac{2}{kr}\right)^{\nu+\frac{1}{2}} \quad (28)$$

sowie

$$\frac{d}{dr} \left[\sqrt{kr} H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right] = -j k \nu \frac{\left(\nu - \frac{1}{2}\right)!}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{kr}\right)^{\nu+1} \quad (29)$$

2. Die Bestimmung von ν und μ beim „Kugelsektor-Trichter“.

Die Gleichungssysteme (18) und (22) gelten ganz allgemein für alle Gebilde, deren Formen sich durch Kugelkoordinaten darstellen lassen. Hier soll der Trichter (Abb. 2) betrachtet werden. Er wird als „Kugelsektor-Trichter“ bezeichnet. Da im Falle $\vartheta_1^* = \varphi_1$ bei kleinem Öffnungswinkel die Fläche $\vartheta^* = \vartheta_1^*$ praktisch eben wird, hat man dann eine ausgezeichnete Näherung für den Pyramiden-Trichter mit quadratischem Querschnitt.

Die Indizierung der Wellentypen im Trichter entspricht der für die Wellentypen im Hohlleiter. Es wird sich zeigen, daß im Trichter H_{nm} - und E_{nm} -Wellen auftreten können. Hierbei soll sich n auf die Abhängigkeit der Amplitude in der ϑ -Richtung und m auf die Abhängigkeit der Amplitude in der φ -Richtung beziehen. Die Zahlen n und m sind ganz und müssen aus ν und μ ermittelt werden.

Die Zahlen ν und μ ergeben sich aus den Grenzbedingungen im Kugelsektor-Trichter. Diese besagen, daß an den Wänden die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke und die Normalkomponenten der magnetischen Feldstärke verschwinden müssen.

Die Zahl μ erhält man dann durch die Bedingungen bei $\varphi = \pm \varphi_1$. Es gilt

$$H_\varphi = 0 \quad \text{bei} \quad \varphi = \pm \varphi_1. \quad (30)$$

Unter der Bedingung (30) ergibt sich aus (18) und (22)

$$\frac{\sin}{\cos} (\mu \varphi_1) = 0 \quad (31)$$

und somit

$$\mu = \frac{n\pi}{2\varphi_1}. \quad (32)$$

Hierbei ist

$$m = \begin{cases} 0, 1, 2, 3, \dots & \text{bei den } H\text{-Wellen} \\ 1, 2, 3, \dots & \text{bei den } E\text{-Wellen.} \end{cases} \quad (33)$$

Die Zahl ν erhält man durch die Grenzbedingungen bei $\vartheta = \vartheta_1$ und $\vartheta = \vartheta_2$. Meistens kommt für die Kugelfunktion die Form (13a) in Frage. Die Konstanten aus (13a) und (23) werden wie folgt zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} C_1 c_1 &= C_{11}; & C_1 c_2 &= C_{12} \\ C_2 c_1 &= C_{21}; & C_2 c_2 &= C_{22}. \end{aligned} \quad (34)$$

Setzt man (13a), (23) und (34) in (14) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} A &= [C_{11} P_\nu^\mu(\cos \vartheta) + C_{21} Q_\nu^\mu(\cos \vartheta)] \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\mu \varphi) \\ &\quad \times \sqrt{kr} H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(1)}(kr) + [C_{12} P_\nu^\mu(\cos \vartheta) + C_{22} Q_\nu^\mu(\cos \vartheta)] \\ &\quad \times \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} (\mu \varphi) \sqrt{kr} H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr). \end{aligned} \quad (35)$$

Die Grenzbedingungen verlangen, daß die Komponenten E_φ , E_r und H_ϑ bei $\vartheta = \vartheta_1$ und $\vartheta = \vartheta_2$ verschwinden.

Wie man aus (17) und (21) sieht, gilt dann für die

$$H\text{-Welle: } \frac{\partial A}{\partial \vartheta} = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta = \vartheta_1 \quad \text{und} \quad \vartheta = \vartheta_2 \quad (36)$$

und für die

$$E\text{-Welle: } A = 0 \text{ für } \vartheta = \vartheta_1 \text{ und } \vartheta = \vartheta_2. \quad (37)$$

Wegen dieser Bedingungen ergeben sich aus (35) für die Konstanten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} & H\text{-Welle} \\ -\frac{C_{21}}{C_{11}} = -\frac{C_{22}}{C_{12}} = & \left(\frac{\frac{dP_v^\mu(\cos \vartheta)}{d\vartheta}}{\frac{dQ_v^\mu(\cos \vartheta)}{d\vartheta}} \right)_{\substack{\vartheta = \vartheta_1 \\ \vartheta = \vartheta_2}}. \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} & E\text{-Welle} \\ -\frac{C_{21}}{C_{11}} = -\frac{C_{22}}{C_{12}} = & \left(\frac{P_v^\mu(\cos \vartheta)}{Q_v^\mu(\cos \vartheta)} \right)_{\substack{\vartheta = \vartheta_1 \\ \vartheta = \vartheta_2}}. \end{aligned} \quad (39)$$

Aus der Differentialgleichung (11) folgt, daß die Kugelfunktion nur bei $\nu = \mu = 0$ unabhängig von ϑ sein würde. Da dieser Fall hier keine Lösung gibt, ist jede Feldkomponente im Kugelsektor-Trichter eine Funktion von ϑ und der Index $n = 0$ tritt nicht auf.

Analog zum Rechteck-Hohlleiter ist daher der niedrigste E -Wellentyp die E_{11} -Welle. Jedoch gibt es zwar H_{n0} -Wellen mit den Feldkomponenten E_φ , H_ϑ und H_r aber keine H_{0m} -Wellen mit den Feldkomponenten E_ϑ , H_φ und H_r .

3. Näherung für kleine Winkel ϑ^* .

Setzt man nach [2] in (11) $\vartheta \approx \frac{\pi}{2}$, also $\text{ctg } \vartheta = 0$ und $\sin \vartheta = 1$, so ergibt sich mit $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \vartheta^*$

$$\frac{d^2 f}{d\vartheta^{*2}} + [\nu(\nu+1) - \mu^2] f = 0. \quad (40)$$

Die Lösung von (40) sind die trigonometrischen Funktionen

$$f = \frac{\sin}{\cos} \left(\sqrt{\nu(\nu+1) - \mu^2} \vartheta^* \right). \quad (41)$$

Für kleine Winkel ϑ^* gilt demnach

$$K_v^\mu(\cos \vartheta) \approx \frac{\sin}{\cos} \left(\sqrt{\nu(\nu+1) - \mu^2} \vartheta^* \right). \quad (42)$$

Aus den Grenzbedingungen an den Trichterwänden bei $\vartheta^* = \pm \vartheta_1^*$ (Abb. 2) — Verschwinden der Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke und der Normalkomponenten der magnetischen Feldstärke — ergibt sich nach Einsetzen von (42) in (18) und (22)

$$\sqrt{\nu(\nu+1) - \mu^2} = \frac{n\pi}{2\vartheta_1^*}. \quad (43)$$

Mit Berücksichtigung von (33) ist dann bei den

$$H\text{-Wellen: } \left. \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = 0, 1, 2, 3, \dots \text{ jedoch niemals } n = m = 0$$

und bei den

$$E\text{-Wellen: } \left. \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = 1, 2, 3, \dots \quad (44)$$

Setzt man (43) in (42) ein, so ergibt sich

$$K_v^\mu(\cos \vartheta) = \frac{\sin}{\cos} \left(\frac{n\pi}{2\vartheta_1^*} \vartheta^* \right). \quad (45)$$

Bei der Näherung (45) erhält man also wegen (44) im Gegensatz zur exakten Lösung auch H_{0m} -Wellen. Bei einem Trichter mit $\varphi_1 = \vartheta_1^*$ sind daher bei der

Näherung (45) die Flächen $\varphi = \varphi_1$ und $\vartheta^* = \vartheta_1^*$ gleichwertig, d. h. man kann die Flächen $\vartheta^* = \vartheta_1^*$ als eben ansehen. Damit entspricht also diese Näherung aus dem Pyramiden-Trichter mit kleinem Öffnungswinkel $2\vartheta_1^*$.

Bei Einsetzen von (32) in (43) erhält man

$$\nu(\nu+1) = \frac{\pi^2}{4} \left[\left(\frac{n}{\vartheta_1^*} \right)^2 + \left(\frac{m}{\varphi_1} \right)^2 \right] \quad (46)$$

und somit

$$\nu = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{4} \left[\left(\frac{n}{\vartheta_1^*} \right)^2 + \left(\frac{m}{\varphi_1} \right)^2 \right]}. \quad (47)$$

Benutzt man die Formel für die Grenzwellenlänge im Rechteck-Hohlleiter,

$$\lambda_g = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2}},$$

und betrachtet Trichter mit $\vartheta_1^* \rightarrow 0$ und $\varphi_1 \rightarrow 0$, so ergibt sich nach Einsetzen von (48) in (46) mit $a = 2r\vartheta$ und $b = 2r\varphi_1$

$$\nu(\nu+1) = \left(\frac{2\pi r}{\lambda_g} \right)^2. \quad (49)$$

4. Die Feldkomponenten bei der H_{10} -Welle und der Fehler bei der Näherung $K_v^0(\cos \vartheta) = \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*} \right)$.

Setzt man $A \sim \cos \mu \varphi$ und $\mu = 0$, so ergeben sich aus (18) die Feldkomponenten der H_{n0} -Wellen.

$$\left. \begin{aligned} E_r &= 0; E_\vartheta = 0; H_\varphi = 0 \\ E_\varphi &= -\frac{1}{r} \frac{d}{d\vartheta} [K_v^0(\cos \vartheta)] \sqrt{k r} Z_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \\ H_r &= \frac{j}{Z_0} \frac{k \nu(\nu+1)}{(kr)^2} K_v^0(\cos \vartheta) \cdot \sqrt{k r} Z_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \\ H_\vartheta &= \frac{j}{Z_0} \frac{1}{kr} \frac{d}{d\vartheta} [K_v^0(\cos \vartheta)] \cdot \frac{d}{dr} \left[\sqrt{k r} Z_{\nu+\frac{1}{2}}(kr) \right] \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Es soll nun bei dem Trichter in Abb. 2 nur die H_{10} -Welle in Richtung r betrachtet werden. Es wird daher in (50) für die Zylinderfunktion $Z_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)$ die HANKELSche Funktion 2. Art $H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr)$ und nach (45) die Näherung

$$K_v^0(\cos \vartheta) = \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*} \right) \quad (51)$$

eingesetzt. Mit Hinzufügung des Faktors $C_1 e^{j\omega t}$ erhält man dann

$$\left. \begin{aligned} E_r &= 0; E_\vartheta = 0; H_\varphi = 0 \\ E_\varphi &= C_1 \frac{\pi}{2\vartheta_1^* r} \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*} \right) \cdot \sqrt{k r} H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \cdot e^{j\omega t} \\ H_r &= j C_1 \frac{k \nu(\nu+1)}{Z_0 (kr)^2} \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*} \right) \\ &\quad \times \sqrt{k r} H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \cdot e^{j\omega t} \\ H_\vartheta &= -j C_1 \frac{\pi}{Z_0 2\vartheta_1^* k r} \cos \left(\frac{\pi}{2} \frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*} \right) \\ &\quad \times \frac{d}{dr} \left[\sqrt{k r} H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(kr) \right] \cdot e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Einsetzen von $n = 1$ und $m = 0$ in (47) ergibt

$$\nu = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{\pi}{\vartheta_1^*} \right)^2}. \quad (53)$$

Für das Fernfeld, d. h. $kr \gg 1$ und $kr \gg \left(\nu + \frac{1}{2} \right)$

elten die Näherungen (25) und (26). Setzt man diese in (52) ein, so ergibt sich mit

$$C = C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{j(\nu+1)\frac{\pi}{2}} \quad (54)$$

im Fernfeld

$$\left. \begin{aligned} E_\varphi &= C \frac{\pi}{2 \vartheta_1^* r} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*}\right) \cdot e^{-j(kr - \omega t)} \\ H_r &= C \frac{k\nu(\nu+1)}{Z_0(kr)^2} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*}\right) \cdot e^{-j(kr - \omega t - \frac{\pi}{2})} \\ H_\theta &= -C \frac{\pi}{Z_0 2 \vartheta_1^* r} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*}\right) e^{-j(kr - \omega t)} \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

ur Feststellung des Fehlers bei der Näherung (51) werden aus (50) für den Winkel $\vartheta_1^* = 26,57^\circ$ die Feldkomponenten bei einer H_{10} -Welle exakt ausgerechnet. Der Winkel $\vartheta_1^* = 26,57^\circ$ wird gewählt, da er erstens der Größe der in der Praxis üblichen halben Öffnungswinkel liegt und zweitens bei der Kugelfunktion nur die Berücksichtigung der P-Funktion $P_3(\cos \vartheta)$ verlangt. Nach [4] Seite 105 ist mit $\vartheta = \frac{\pi}{2} - \vartheta^*$

$$P_3(\cos \vartheta) = \frac{4}{8} (5 \sin^3 \vartheta^* - 3 \sin \vartheta^*) \quad (56)$$

und daher

$$\frac{d}{d\vartheta} P_3(\cos \vartheta) = 0 \text{ für } \vartheta^* = \pm 26,57^\circ. \quad (57)$$

nach (38) werden dann die Konstanten C_{21} und C_{22} in (55) Null, so daß die Q-Funktionen fortfallen.

In diesem Falle ist also $\nu = 3$ und nach [4] Seite 135

$$e^{j\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(kr)} = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \left(1 - j \frac{6}{kr} - \frac{15}{(kr)^2} + j \frac{15}{(kr)^3}\right) e^{-jkr}. \quad (58)$$

Abb. 3 zeigt den Verlauf der Kugelfunktion $P_3(\cos \vartheta)$

in Abhängigkeit von $\vartheta^* = \frac{\pi}{2} - \vartheta$ im Bereich $\vartheta^* = 0$

bis $26,57^\circ$. In Abb. 4 sieht man den Fehler bei Er-

setzen der Funktion $P_3(\cos \vartheta)$ durch $B \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\vartheta^*}{\vartheta_1^*}\right)$,

wobei B der Wert von $P_3(\cos \vartheta)$ an der Stelle $\vartheta^* = \vartheta_1^* = 26,57^\circ$ ist. Der Fehler ist so gering (relativer Fehler immer kleiner als 1%), daß man ihn vernachlässigen kann. Berechnet man durch Einsetzen von $\vartheta_1^* = 26,57^\circ$ den Wert ν aus (53), so ergibt sich $\nu = 2,93$. Gegenüber $\nu = 3$ beträgt hier der Fehler 3%. Mit abnehmendem Winkel ϑ_1^* werden die Abweichungen gegenüber den exakten Werten sehr schnell kleiner.

Setzt man in (50) für die Kugelfunktion (56) und für die Zylinderfunktion (58) ein, so werden für $\vartheta_1^* = 26,57^\circ$ im Nah- und Fernfeld die magnetischen Feldlinien und die Phase der Feldkomponenten exakt angegeben (Abb. 5 und 6).

Die magnetischen Feldlinien ergeben sich aus der Differentialgleichung, welche durch die Beziehung

$$-\frac{r d\vartheta^*}{dr} = \frac{\text{Realteil von } H_\theta}{\text{Realteil von } H_r} \quad (59)$$

gegeben ist.

Zusammenfassung.

Es wird die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einem Pyramiden-Trichter mit quadratischem Querschnitt theoretisch untersucht.

Der Pyramiden-Trichter (Abb. 1) wird durch einen Ausschnitt aus einer Kugel, dem Kugelsektor-Trichter (Abb. 2) angenähert. In diesem werden die Wände durch ebene Flächen $\pm \varphi = \text{const}$ und Kegelflächen $\pm \vartheta^* = \text{const}$ ($\vartheta^* = \frac{\pi}{2} - \vartheta$, $\vartheta =$ Poldistanz, $\varphi =$ Azimut) gebildet, und die Wellen breiten sich in Richtung r kugelförmig aus. Bei einem Öffnungswinkel $2\varphi_1 = 2\vartheta_1^* < 53^\circ$ kann man im elektrischen Verhalten den Unterschied zwischen dem Kugelsektor-Trichter und dem Pyramiden-Trichter vernachlässigen.

Bei einem Öffnungswinkel $2\vartheta_1^* = 2 \cdot 26,57^\circ$ werden für die H_{10} -Welle die Feldkomponenten E_φ , H_θ und H_r im Kugelsektor-Trichter exakt angegeben. Bei der Näherung der Kugelfunktion durch eine sin-Funktion entsteht bei den Feldstärken ein maximaler Fehler von 1%. Dieser Fehler wird bei Abnehmen des Winkels ϑ_1^* sehr schnell geringer.

Im Trichter hat man keine Grenzwellenlänge. Im Fernfeld ist die Wellenlänge gleich der im freien Raum und die Amplituden der Feldstärken nehmen bei den transversalen Komponenten mit $\frac{1}{r}$ und bei den longitudinalen Komponenten mit $\frac{1}{r^2}$ ab.

Die longitudinalen Komponenten wachsen mit abnehmenden Öffnungswinkel oder höher werdendem Wellentypus.

Gleichung (10) gibt die Feldkomponenten für die H_{10} -Welle im Fernfeld an. Die Kugelfunktion wurde hier durch eine sin-Funktion ersetzt. Die Welle breitet sich in Richtung r kugelförmig aus und hat ihren theoretischen Ursprung in der fiktiven Trichterspitze. Das bedeutet, daß die Flächen gleicher Phase konzentrische Kugelflächen sind, deren Zentrum die Trichterspitze ist.

Im Nahfeld wird die Wellenlänge zur Trichterspitze hin sehr schnell größer, um schließlich den Wert unendlich zu erreichen.

Je kleiner der Öffnungswinkel des Trichters oder je höher der Wellentyp ist, um so größer werden das Nahfeld und die Amplituden der Feldstärken in diesem, so daß hier die Dämpfung durch Verluste an den Trichterwänden stark ansteigt.

Literatur. [1] BUCHHOLZ, H.: Annalen der Phys. **37**, 173 (1940). — [2] KLEINWÄCHTER, H.: A. E. Ü. **5**, 231 (1951). — [3] MAGNUS-OBERHETTINGER: Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. 2. Aufl. Springer-Verlag, Berlin 1948. — [4] JAHNKE-EMDE: Tafeln höherer Funktionen, 4. Aufl. B. G. Teubner Verlagsges., Leipzig 1948. — [5] SOMMERFELD, A.: Vorlesungen über theoretische Physik, Band 6: Partielle Differentialgleichungen der Physik. Dieterichsche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden 1947.

Dr. GERHARD PIEFKE,

Zentrallaboratorium der Siemens u. Halske AG.,
München.

Berichtigung

Seite 502, linke Spalte, 1. Zeile, statt: Richtung fortschreitenden ...
muß es heißen: Richtung ν fortschreitenden ...

Die Erzeugung ungedämpfter elektrischer Schwingungen in Serien- und Parallelschwingkreisen.

Von HARRY PFEIFER.

Mit 2 Textabbildungen.

(Eingegangen am 10. Februar 1954.)

Bekanntlich kann man sowohl in einer Serien- als auch in einer Parallelschaltung von Spule und Kondensator ungedämpfte elektrische Schwingungen erzeugen, sofern man für eine entsprechende Energiezufuhr sorgt. Diese Energienachlieferung erfolgt durch ein Steuerorgan, das eine negative Strom-Spannungscharakteristik besitzt. D. h. eine Stromzunahme im Organ erniedrigt den Spannungsabfall bzw. eine Verkleinerung der angelegten Spannung erzeugt eine Stromzunahme und umgekehrt. Dieser „negative Widerstand“ muß sowohl nach kleineren Strom-Spannungswerten hin als auch nach größeren in einen positiven Widerstand übergehen. Es muß nämlich vom Nullpunkt ausgehend zunächst ein positiver Ast durch-

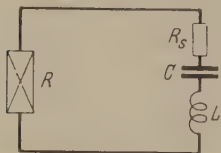


Abb. 1. Serienschwingkreis mit parallelgeschaltetem negativen Widerstand.



Abb. 2. Schwingradkreis.

laufen werden, damit überhaupt Änderungen der oben beschriebenen Art möglich sind, und nach größeren Werten zu kann der negative Ast sich auch nicht beliebig weit ausdehnen, da in seinem Bereich das Steuerorgan Energie abgibt, und dies nur in begrenztem Maße möglich ist. Demzufolge wird es zwei Arten von Steuerorganen geben, die sich durch den Übergang vom positiven zum negativen Ast unterscheiden. Wird der fallende Ast mit $R = dU/dI < 0$ über $R = 0$ erreicht, so spricht man von einem Organ mit Lichtbogenkennlinie oder auch von einem stromgesteuerten Organ. Im anderen Falle erfolgt der Übergang an der Grenze des negativen Widerstands in den Ast positiven Widerstands über den Wert $R = dU/dI = \infty$. Solche Organe nennt man negative Widerstände mit Dynatronkennlinie oder spannungsgesteuerte Organe.

Eine einfache Rechnung — ohne Berücksichtigung von Gliedern mit nichtlinearem Zusammenhang — zeigt nun, daß ein Serienschwingkreis ganz allgemein von einem negativen Widerstand zu Schwingungen erregt wird, dessen Betrag größer ist als der Seriendämpfungswiderstand des Kreises. Experimentell findet man jedoch, daß ein Serienschwingkreis nur von einem Organ mit Lichtbogencharakter erregt werden kann. Für einen Parallelkreis (Schwingradkreis) zeigt die Rechnung, daß er von jedem negativen Widerstand erregt wird, dessen Betrag kleiner ist als der Parallelwiderstand des Kreises. Das Experiment ergibt dagegen, daß nur ein Organ mit Dynatroncharakter Schwingungen anfachen kann. Bei den „falschen“ Kombinationen tritt keine Selbsterregung ein, auch wenn die Bedingungen über den Betrag des negativen Widerstands erfüllt sind.

Zur Deutung dieser Erscheinung wurden verschiedene Ansätze gemacht: BARKHAUSEN [2] führte den

Unterschied zurück auf einen solchen zwischen Ursache und Wirkung bei den beiden Typen von negativen Widerständen, als deren Ausdruck er ein Serieninduktivität beim Lichtbogen und eine Parallelkapazität beim Dynatron einführt. K. HEEGNER [3] und unabhängig davon R. URTEL und E. KETTEL [4] zeigten durch Lösen der Differentialgleichung der Röhrenersatzschaltungen, daß bei der „falschen“ Zusammenschaltung ein Ausgleichsvorgang die zunächst angefachten Schwingungen überwiegt. Nach Angabe von K. W. WAGNER [5] finden sich analoge Betrachtungen bei CARRARA [6]. In einer unlängst erschienenen Arbeit hat K. STEIMEL [1] erneut dieses Problem behandelt. Er wandte das Nyquistische Theorem an, und es ergab sich, daß tatsächlich bei den „falschen“ Kombinationen die in Frage kommende Schwingung nicht auftritt.

Alle diese Verfahren greifen zurück auf Röhrenersatzschaltungen oder Einführung von zusätzlichen Parallelkapazitäten bzw. Reiheninduktivitäten, und es liegt nahe, das Problem direkt durch Behandlung der Schwingungsdifferentialgleichung zu lösen; insbesondere da die oben erwähnte notwendige Bedingung für den Betrag des zur Schwingungsanfänger erforderlichen negativen Widerstands ja auch ohne den Ersatz des Organs mit negativer Charakteristik durch Röhrenschaltungen abgeleitet wird.

Wir betrachten die in Abb. 1 dargestellte Parallelschaltung eines Steuerorgans zu einem Serienresonanzkreis. R_s ist der Seriendämpfungswiderstand des Kreises. Dann gilt

$$L I'' + \frac{1}{C} \int I dt + R_s I + R I = 0. \quad (1)$$

Für den Parallelschwingkreis gilt entsprechend, wenn wir mit R_p seinen Resonanzwiderstand bezeichnen, vgl. Abb. 2,

$$C U'' + \frac{1}{L} \int U dt + \frac{1}{R_r} U + \frac{1}{R} U = 0. \quad (2)$$

Durch Differentiation nach der Zeit erhalten wir daraus

$$I'' + \frac{1}{L} (R_s + R) I' + \frac{1}{L} (R_s + R) I + \omega_0^2 I = 0 \quad (1')$$

$$U'' + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_r} + \frac{1}{R} \right) U' + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_r} + \frac{1}{R} \right) U + \omega_0^2 U = 0 \quad (2')$$

mit $\omega_0^2 = 1/LC$.

Diese beiden Differentialgleichungen fassen wir zusammen zu

$$x'' + (A_1 + B_1) x' + (A_1 + B_1) x + \omega_0^2 x = 0 \quad (3)$$

mit $A_1 = R/L$ bzw. $1/R C$ und $B_1 = R_s/L$ bzw. $1/R_p C$, welche wir später weiter behandeln werden. Zunächst ersetzen wir in Gl. (1) den Strom I durch U/R und in Gl. (2) die Spannung U durch $R I$. Es folgt dann:

$$U'' L/R + U' \left(2 \left(\frac{L}{R} \right)' + 1 + \frac{R_s}{R} \right) + U \left(\frac{1}{R C} + \left(\frac{R_s}{R} \right)' + \left(\frac{L}{R} \right)'' \right) = 0, \quad (1'')$$

Wie

$$R C + I \left(2 (R C)^* + 1 + \frac{R}{R_p} \right) + I \left(\frac{R}{L} + \left(\frac{R}{R_p} \right)^* + (R C)^{**} \right) = 0. \quad (2'')$$

Auch diese beiden Differentialgleichungen sind gleich gebaut, so daß wir sie zu einer zusammenfassen können:

$$A_2 + x^* \left(2 A_2^* + 1 + \frac{A_2}{B_2} \right) + x \left(A_2 \omega_0^2 + \left(\frac{A_2}{B_2} \right)^* + A_2^{**} \right) = 0, \quad (4)$$

wobei $A_2 = L/R$ bzw. $R C$ und $B_2 = L/R_s$ bzw. $R_p C$. Für A_1 machen wir nun folgenden Ansatz:

$$A_1 = \alpha + \beta x + \gamma x^2.$$

Das bedeutet

$$\begin{aligned} \text{für den Serienkreis } R &= L \alpha + L \beta I + L \gamma I^2, \\ \text{für den Schwungradkreis } 1/R &= C \alpha + C \beta U + C \gamma U^2. \end{aligned}$$

Venn $\alpha < 0$ und $\gamma > 0$ sind, so entspricht dies der analytischen Darstellung einer Lichtbogen- bzw. Dynatronkennlinie. β kann größer, gleich oder kleiner Null sein, je nach der Lage des Arbeitspunktes in bezug auf den Wendepunkt der Kennlinie. Man sieht, ein Serienkreis, der mit einem stromgesteuerten Organ zusammengeschaltet ist, führt zu derselben Differentialgleichung wie ein Schwungradkreis, der parallel zu einem spannungsgesteuerten Organ liegt. Für die Größe A_2 in Gl. (4) setzen wir an

$$\omega_0^2 A_2 = \alpha + \beta x + \gamma x^2.$$

Das für den Serienkreis $1/R = C \alpha + C \beta U + C \gamma U^2$ und für den Parallelkreis $R = L \alpha + L \beta I + L \gamma I^2$ bedeutet.

Gl. (4) stellt also die Differentialgleichung für einen Serienkreis dar, der mit einem spannungsgesteuerten Organ verbunden ist bzw. für einen Schwungradkreis mit parallel liegendem stromgesteuerten Organ.

Führen wir nun die Ansätze für A_1 und A_2 in (3) und (4) ein, so folgt

$$x^{**} + x^* (\alpha + 2 \beta x + 3 \gamma x^2 + B_1) + x \omega_0^2 = 0 \quad (3')$$

bzw.

$$\begin{aligned} x^{**} \left(\frac{\alpha}{\omega_0^2} + \frac{2 \beta}{\omega_0^2} x + \frac{3 \gamma}{\omega_0^2} x^2 \right) + x^{*2} \left(\frac{2 \beta}{\omega_0^2} + \frac{6 \gamma}{\omega_0^2} x \right) + \\ + x^* \left(1 + \frac{\alpha}{B_2 \omega_0^2} + \frac{2 \beta}{B_2 \omega_0^2} x + \frac{3 \gamma}{B_2 \omega_0^2} x^2 \right) + \\ + x (\alpha + \beta x + \gamma x^2) = 0. \end{aligned} \quad (4')$$

Wir multiplizieren (3) und (4) mit x^* und integrieren über die (unbekannte) Periode der Lösung:

$$\int_0^{2\pi/\omega} x^{*2} (\alpha + B_1 + 2 \beta x + 3 \gamma x^2) dt = 0$$

bzw.

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/\omega} x^{*3} \left(\frac{\beta}{\omega_0^2} + \frac{3 \gamma}{\omega_0^2} x \right) dt + \\ + \int_0^{2\pi/\omega} x^{*2} \left(1 + \frac{\alpha}{B_2 \omega_0^2} + \frac{2 \beta}{B_2 \omega_0^2} x + \frac{3 \gamma}{B_2 \omega_0^2} x^2 \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Wir prüfen nun, ob eine periodische Lösung der Form $x = x_0 \sin \omega t$ existieren kann. Durch Einsetzen folgt

$$x_0^2 (\alpha + B_1) \omega \pi + 3 \gamma \frac{\omega}{4} \pi x_0^4 = 0$$

oder

$$x_0^2 = -\frac{4}{3 \gamma} (\alpha + B_1) \quad (3'')$$

bzw.

$$x_0^2 \left(1 + \frac{\alpha}{B_2 \omega_0^2} \right) \omega \pi + \frac{3 \gamma}{B_2 \omega_0^2} \frac{\omega}{4} \pi x_0^4 = 0$$

oder

$$x_0^2 = -\frac{4}{3 \gamma} (\alpha + B_2 \omega_0^2). \quad (4'')$$

Beachten wir die notwendigen Bedingungen für die Schwingungsanfachung, so wird in Gl. (3'')

für den Serienkreis $R_s < -L \alpha$

für den Parallelkreis $R_p > -1/C \alpha$,

in beiden Fällen also $B_1 < -\alpha$ d. h. die durch (3'') gegebene Amplitude der Schwingung ist reell. In Gl. (4'') muß nun

für den Serienkreis $R_s < -1/C \alpha$,

für den Parallelkreis $R_p > -L \alpha$

gelten, in beiden Fällen also $B_2 \omega_0^2 < -\alpha$ d. h. die durch (4'') gegebene Amplitude der Schwingung ist imaginär.

Wir haben somit bewiesen, daß bei den sogenannten „falschen“ Kombinationen sich keine stabilen sinusförmigen Schwingungen ausbilden können, während bei den „richtigen“ Kombinationen solche Schwingungen möglich sind. Welche Bedingungen hierfür noch erfüllt sein müssen, erhält man durch Einsetzen der Lösung $x = x_0 \sin \omega t$ in die Differentialgleichung der „richtigen“ Kombination (3'), und mittels Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \\ \beta x_0 &\leq \omega_0 \\ \frac{1}{\omega_0} |\alpha + B_1| &\leq 1. \end{aligned}$$

D. h. stabile sinusförmige Schwingungen werden auftreten, wenn der Betrag der Dämpfung im Moment des Anschlingens klein gegen eins ist, und der Arbeitspunkt in der Nähe des Wendepunktes der Strom-Spannungskennlinie des nichtlinearen Gliedes liegt. Je schlechter diese Bedingungen erfüllt sind, desto mehr entarten die Schwingungen zu den sogenannten Relaxationsschwingungen, wie man durch numerische Integration leicht findet [7]. Ob bei den „falschen“ Kombinationen Relaxationsschwingungen auftreten können, bleibt bei unserer Behandlung des Problems offen; denn die Rechnung beweist nur, daß Sinus-schwingungen nicht möglich sind. Tatsächlich hat man auch bei den „falschen“ Kombinationen periodisch wiederkehrende Entladevorgänge (Relaxationsschwingungen) beobachten können [8].

Zusammenfassung.

Sowohl mit Parallel- als auch mit Serienschwingkreisen lassen sich elektrische Schwingungen erzeugen, sofern man für eine entsprechende Entdämpfung durch negative Widerstände sorgt. Es ergab sich experimentell, daß jedoch bei Serienkreisen nur negative Widerstände mit Lichtbogenkennlinien und bei Parallelschwingkreisen nur negative Widerstände mit Dynatronkennlinien zur Erzeugung sinusförmiger Schwingungen geeignet sind. Es wird analytisch gezeigt, daß dies zwanglos aus der verschiedenen Form der Strom-Spannungskennlinie der beiden Arten von negativen Widerständen folgt.

Literatur. [1] STEIMEL, K.: Telefunkenzeitung 26, 73 (1953). — [2] BARKHAUSEN, H.: Phys. Z. 27, 43 (1926). — [3] HEEGNER, K.: Z. f. Hochfrequenztechn. und Elektroakustik 40, 198 (1932). — [4] URTEL, R. u. E. KETTEL: Negative Widerstände und ihre Stabilitätsbedingungen. Unveröffentlichter Bericht der Telefunken-Gesellschaft E.C. Nr. 108 (1944). — [5] WAGNER, K. W.: Lehre von den Schwingungen und Wellen.

Dietrich, Wiesbaden 1947. — [6] CARRARA, N.: Alta Freq. 683 (1939). — [7] VAN DER POL: Proc. Inst. Radio Eng. 3, 1051 (1934). — [8] ROTHE, H. u. W. KLEEN: Elektronenröhre als Schwingungserzeuger und Gleichrichter. Akad. Verlagsgesellsch. Becker und Erler, Leipzig 1941.

Dr. HARRY PFEIFER,
Physikalisches Institut der Universität Leipzig.

Die bei schnell rotierenden Kreisel in einem Magnetfeld entstehenden magnetischen Polpaare und die Mißweisungen, die sich bei einem Vermessungskreisels daraus ergeben.*

Von KLAUS BEHRNDT.

Mit 14 Textabbildungen.

(Eingegangen am 26. Februar 1954.)

A. Einleitung.

Der Kreiselkompaß ist seit über 40 Jahren zur Angabe der wahren Nordrichtung verwendet worden [1]. Zuerst wurde er in der Schifffahrt eingesetzt, doch schon bald entstand der Plan, einen Vermessungskreisels zu entwickeln, für den sich im Bergbau und in der Landesvermessung eine große Zahl von Anwendungsmöglichkeiten ergeben [2, 3].

Wenn sich ein Kreiselkompaß auf einem Fahrzeug befindet, so liegen die stärksten Fehlerquellen in den „Fahrt- und Schlingerfehlern“. Es sind eine Reihe von Arbeiten erschienen, die sich mit diesen Problemen beschäftigen (z. B. [4, 5]). Bei einem Vermessungskreisels erfolgt die Messung in stationärer Aufstellung, so daß keine Fahrt- oder Schlingerfehler auftreten können. Dafür ist die Genauigkeit, die für eine Richtungsangabe gefordert werden muß, mit mindestens $\pm 1'$ weit höher als beim Schiffskreisels, so daß auch Fehlerquellen ausgeschaltet werden müssen, die beim Schiffskreisels nicht beachtet zu werden brauchen.

Die Gleichungen, die bisher verwendet wurden, um die Schwingbewegungen von Kreiseln zu beschreiben und rechnerisch zu erfassen, enthalten nur Terme, die von geophysikalischen Konstanten (geographische Breite φ , Erdbeschleunigung g , Drehgeschwindigkeit der Erde ω) oder geräteeigenen Größen abhängen (vgl. [6, 7]). Aus diesem Grunde wäre zu erwarten, daß etwaige Weisungsfehler im Gerät selbst begründet sein müßten.

G. JUNGWIRTH hat gezeigt, welche Bedeutung den Änderungen des Drehimpulses des Kreisels zukommt, wie sich diese Änderungen rechnerisch erfassen lassen und zu welchen Fehlern in der Weisungsangabe sie führen können [7]. Da die Drehimpulsschwankungen nicht periodisch auftreten, kann man sie nicht unmittelbar bei der Aufstellung der Kreiselmessgleichungen berücksichtigen. Wenn es gelingt, den Drehimpuls konstant zu halten und konstruktive Fehler des Gerätes zu vermeiden, dann dürften Fehler in der Weisungsangabe eines Vermessungskreisels nicht mehr auftreten.

Es muß aber noch weitere Fehlerquellen geben, deren Vorhandensein aus den bisherigen Kreiselmessgleichungen nicht abgelesen werden kann. Ein Hinweis darauf ergab sich während des letzten Krieges. Damals wurden mehrfach Schiffe mit starken Elektromagneten ausgerüstet, um so die Räumung von Magnetminenfeldern durchführen zu können. Bei dieser

Gelegenheit bemerkte man zum ersten Male, daß der Kreiselkompaß der verwendeten Schiffe unter dem Einfluß der sehr starken Magnetfelder eine Änderung ihrer Weisung zeigten. Da auch mehrfach die Ursachen größerer Fehlweisungen des Vermessungskreisels „Meridianweiser“ (dieser Kreiselkompaß wurde in den Jahren 1947–52 am Markscheide-Institut der Bergakademie Clausthal entwickelt, vgl. [7, 8, 9]) in der Einwirkung von Magnetfeldern gelegen haben dürfte, wurden auf Veranlassung von O. RELENSMANN systematische Untersuchungen darüber angestellt, ob ein Zusammenhang zwischen Stärke und Richtung eines magnetischen Störfeldes und der Weisungsangabe des Meridianweisers erkennbar ist [10, 1]. Die Ergebnisse dieser Experimente haben den Anlaß zu der vorliegenden Arbeit gegeben. In ihr war zu untersuchen, inwieweit die Bewegungsgesetze eines Kreisels beeinflusst werden, wenn er in einem Magnetfeld rotiert.

B. Die experimentellen Ergebnisse.

a) Einführung.

Bei den ersten Untersuchungen, an die sich die vorliegende Arbeit unmittelbar anschließt, war folgendes beobachtet worden:

1. Die Weisungsangabe des Vermessungskreisels wird durch das Einwirken von Magnetfeldern beeinflusst, wobei der Betrag des Weisungsfehlers sowohl von der Stärke als auch von der Richtung des einwirkenden Magnetfeldes abhängt und auch die Remanenz in den Ferromagnetika des Gerätes (Stativ usw.) sich bemerkbar macht.

2. Bei den untersuchten Kreiseln bildet sich eine „magnetische Achse“ aus, die ihre räumliche Lage auch bei Rotation des Kreisels beibehält. Sie äußert sich in zwei definierten Polen, die sich — einander diametral gegenüber — auf dem Rand des Kreiselrotors befinden (vergl. [10], Abb. 14 und [1], Abb. 7).

Als äußeres Magnetfeld für die in [10] beschriebenen Versuche hatte das Erdfeld bzw. das sehr inhomogene Feld einer Eisenkernspule gedient. Um Kenntnis von dem gesamten Mechanismus der Vorgänge im Kreisel zu erhalten, war es notwendig, den Kreisel in einem homogenen, variablen Magnetfeld zu untersuchen. Hierfür kam nur das Feld einer großen HELMHOLTZspule in Frage. Ferner war es erforderlich, den Kreisel auch im feldfreien Raum rotieren zu lassen, um definierte Ausgangswerte zu erhalten. Aus diesem Grunde mußte die Versuchsanlage es gestatten, nicht nur die Horizontal- sondern auch die Vertikalkomponente

* Gekürzte Dissertation der Bergakademie Clausthal 1954.

des Erdfeldes (H_0 bzw. Z_0) zu kompensieren, d. h. es wurden zwei Systeme von HELMHOLTZspulen benötigt, deren Achsen — bei gleichem Mittelpunkt der Systeme — in Richtung von H_0 bzw. Z_0 verlaufen mußten (Abb. 1).

Diese experimentellen Bedingungen waren in Lauscha nur sehr schwer realisierbar, im Erdmagnetischen Observatorium Wingst dagegen in geradezu idealer Weise erfüllt. Die Benutzung der Anlage wurde vom Deutschen Hydrographischen Institut in Lauscha gütiglicherweise gestattet, wofür an dieser Stelle nochmals herzlich gedankt sei.

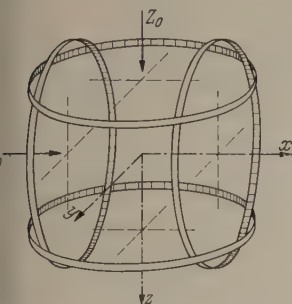


Abb. 1. Schematische Darstellung des Systems der Helmholtz-Spulen.

Zu jedem System gehören 4 — anstatt 2 — Spulen, wobei der Durchmesser der beiden inneren Spulen größer als der der äußeren ist. Bei einem maximalen Ringdurchmesser von 7 m blieben die Inhomogenitäten des Feldes innerhalb einer Kugel von 1 m Durchmesser um den Mittelpunkt der Systeme unter $0,1\%$. Durch Variation des Spulenstromes konnte das Feld der Horizontal- bzw. Vertikalintensität um ± 1 Oe geändert werden. Der Spulenstrom betrug $1,064$ A (Spulenstrom pro 100 mOe Spulenfeld).

Der Kreisel wurde derart aufgebaut, daß der Mittelpunkt seiner — horizontal verlaufenden — Figurenachsen mit dem Mittelpunkt der Spulensysteme zusammenfiel. Die Drehachse war bei den Messungen entweder parallel zum magnetischen Meridian oder senkrecht dazu ausgerichtet.

Es sollte das vom Kreisel selbst ausgehende Magnetfeld („Kreisel Feld“) ausgemessen werden, das sich dem äußeren Feld (Erdfeld + Spulenfeld) überlagert. Aus diesem Grunde lagen die Meßpunkte auf einem um die Kreiselmitte gezogenen Kreis von 12 cm Radius (Abb. 2). Ihre Lage wurde durch den Winkel α zwischen dem durch sie gezogenen Radiusvektor und einer Meridianlinie charakterisiert. Die Entfernung von einem Meßpunkt zum nächsten betrug im Winkelmaß $7,5^\circ$. In jedem Meßpunkt wurden die drei zueinander senkrechten Feldkomponenten gemessen, aus denen die Totalintensität des Feldes für den betreffenden Raumpunkt nach Größe und Richtung berechnet werden konnte.

Die Meßpunkte lagen einmal in der Horizontalenebene, die die Kreiselachse enthielt, zum anderen in einer Vertikalebene. Ein vertikal stehender Halbkreis wurde so auf der horizontalen Grundplatte aufgebaut, daß er die Kreiselachse oder die hierzu senkrechte, durch den Kreiselmittelpunkt verlaufende Linie enthielt (Abb. 2).

Wegen der räumlichen Aufstellung des Spulensystems wurde den Messungen folgendes Koordinatensystem zugrunde gelegt: Die X-Achse wies — parallel zur Horizontalenkomponente des Erdfeldes — nach

magnetisch Nord. Die ebenfalls in der Horizontalenebene verlaufende Y-Achse war um 90° im Rechtssinn gegen die Richtung der X-Achse gedreht. Die Z-Achse wies vertikal nach unten.

Zur Durchführung der Messungen wurde ein „Örstedmeter“ vom Institut Dr. FÖRSTER, Reutlingen, verwendet. Dieses Gerät, das nach demselben Prinzip arbeitet wie das „airborne-magnetometer“ (vergl. [11]),

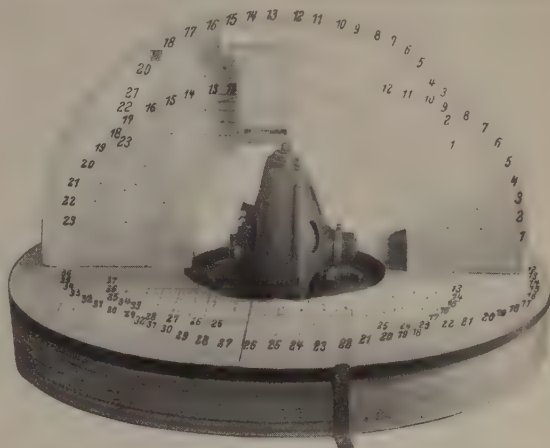


Abb. 2. Blick auf die Meßanordnung.

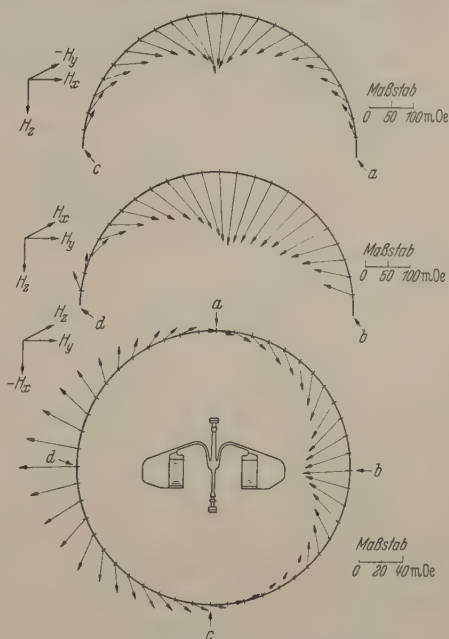


Abb. 3. Kreisel Feld (Kreisel 18): Darstellung der Feldvektoren für $H_x = H_y = 0$, $H_z = +800$ mOe. Kreisel Feld bei Rechtslauf.

gestattet die Messung von Feldern in der Stärke von 0,01 bis 1000 mOe. Sein eigentliches Meßsystem befindet sich in den beiden „Sonden“. Um die Messungen reproduzierbar durchführen zu können, wurden die Sonden in einen hölzernen „Sondenkörper“ geschoben (in Abb. 2 am Vertikalkreis steckend), der mit Hilfe von Steckstiften an der Grundplatte befestigt werden konnte, wodurch die einzelnen Meßpunkte fixiert waren.

c) Die Experimente und ihre Deutung.

Das „induzierte Polpaar“. Die Abb. 3 gibt eine Darstellung des Kreiselfeldes, welches entsteht, wenn bei rotierendem Kreisel die Vertikalkomponente des

äußeren Feldes $+ 800 \text{ mOe}$ beträgt, während $H_x = H_y = 0$ ist. Der untere Teil der Abbildung zeigt einen Schnitt in der durch die Kreiselachse verlaufenden Horizontalebene. Darüber sind die beiden Vertikalkreise eingezeichnet, deren oberer parallel zur Kreiselachse und über derselben aufgerichtet zu denken ist, während der untere parallel zur Ebene des Kreisels über dem Kreismittelpunkt steht. An den einzelnen Meßpunkten sind die Vektoren der Horizontalintensität bzw. der in der betreffenden Vertikalebene (XZ-

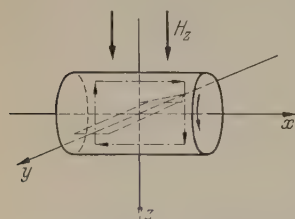


Abb. 4. Schematische Darstellung des Entstehens des „induzierten Polpaares“.

bzw. YZ-Ebene) verlaufenden Intensität des Kreiselfeldes nach Richtung und Größe angetragen. Die Vektoren geben die Größe des „wahren Kreiselfeldes“ wieder, da von den Meßwerten bereits das „äußere Feld“ subtrahiert ist. Ferner sind auch Fehler, die durch kleine Inhomogenitäten des äußeren Feldes oder durch Fehlerwinkel zwischen der Sondenachse und der Richtung der zu vermessenden Feldkomponente entstehen können, durch besondere Verfahren eliminiert.

Die Vektoren, die im unteren Teil der Abb. 3 an den einzelnen Meßpunkten angetragen sind, ergeben sich durch vektorielle Addition der gemessenen X- und Y-Komponenten. Es ist deutlich erkennbar, daß das

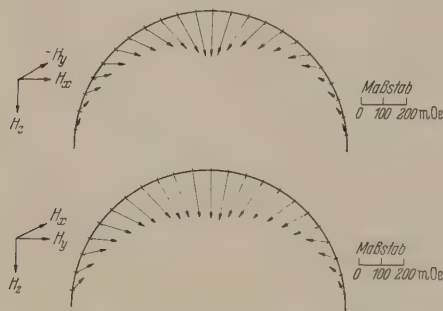


Abb. 5. Kreiselfeld (Kreisel 18): Darstellung der Feldvektoren für $H_x = H_y = 0$, $H_z = + 800 \text{ mOe}$. Feld des „Magnetisierungs-Polpaares“ bei stehendem Kreisel.

Feld von einem Polpaar herrührt, dessen Achse fast genau senkrecht zur Kreiselachse steht, wobei sein Nordpol nach Westen bzw. in die Richtung $-Y$ weist.

Wenn im Folgenden der Begriff des „magnetischen Polpaares“ verwendet wird, so hat das folgende Gründe: Der magnetische Dipol ist ein submikroskopisches Gebilde, so daß z.B. das Feld eines Stabmagneten erst infolge der mehr oder minder guten Parallelstellung der Dipolmomente der atomaren Dipole makroskopisch meßbar wird. Außerdem hat gerade in den Beispielen der vorliegenden Arbeit die ausgemessene Feldverteilung nicht völlig die Gestalt eines „Dipolfeldes“, wie man es bei einem Stabmagneten erhält. Immerhin ist die Ähnlichkeit der Feldbilder, die sich aus den Messungen ergaben, mit dem Feldbild eines Dipols so groß, daß bei der späteren rechnerischen Behandlung der Verhältnisse die Dipolgesetze verwendet werden sollen.

Wie ist nun das in Abb. 3 wiedergegebene Feldbild der Horizontalebene zu erklären? Abb. 4 soll schematisch den Vorgang andeuten. Wegen der besseren

Übersichtlichkeit sind die Verhältnisse an einem Vollzylinder dargestellt. Derselbe möge in Pfeilrichtung rotieren. Dann werden an seiner Ober- und Unterseite Wirbelströme induziert. Wenn man sich diese in der angedeuteten Weise zu einem Kreisstrom geschlossen denkt, so entsteht hierdurch ein Magnetfeld das ebenso wie die Achse des Polpaares in Abb. 3 — senkrecht zur Rotationsachse des Körpers, und zwar nach $-Y$, gerichtet ist. Ferner ergibt sich auch in der Praxis die theoretisch zu erwartende Tatsache, daß sich die Richtung des induzierten Magnetfeldes — also die des Polpaares — umkehrt, wenn man den Drehsinn oder die Richtung des äußeren Feldes ändert.

Das „Magnetisierungs-Polpaar“. Wenn man das in den vertikalen Halbkreisen der Abb. 3 durch die Vektoren gekennzeichnete Feld mit dem des Polpaares in der Horizontalebene vergleicht, so fällt sofort auf, daß die Darstellungen der Felder nicht in Einklang miteinander stehen. Das Feld des in der Horizontalebene liegenden Polpaares dürfte z. B. in dem oberen der Vertikalkreise keine Vektoren von merklicher Größe entstehen lassen, denn die Ebene dieses Vertikalkreises bildet mit der Achse des Polpaares einen Winkel von 90° . Die von dem Polpaar hervorgerufenen Feldvektoren müßten in den einzelnen Meßpunkten senkrecht auf dem Vertikalkreis (parallel zur Richtung des Polpaares) stehen, so daß in der Ebene des Vertikalkreises keine merklichen Feldintensitäten meßbar sein dürften. Nun sind aber die Vektoren in beiden Halbkreisen sogar von größerem Betrag als die in der Horizontalebene von dem Polpaar hervorgerufenen (man beachte die verschiedenen Maßstäbe für die Vektoren).

Es muß also besondere Ursachen für diese Diskrepanzen geben. Um dieselben aufzufinden, wurde der stehende — also nicht rotierende — Kreisel ebenfalls einem äußeren Feld von $H_z = + 800 \text{ mOe}$ bei $H_x = H_y = 0$ ausgesetzt. Die sich ergebende Feldverteilung zeigt Abb. 5, und zwar nur die Vertikalkreise. Das Feld in der Horizontalebene war nämlich nahezu Null. Das ist auch zu erwarten, da die in den Vertikalkreisen eingezeichneten Vektoren das Feld eines vertikal stehenden Polpaares darstellen. Durch weitere Experimente konnte festgestellt werden, daß seine Richtung stets mit der des äußeren Feldes übereinstimmt, während sein magnetisches Moment unabhängig davon war, ob der Kreisel rotierte oder nicht (vergl. Abb. 9, in der die Kurven bei $H_x = + 800 \text{ mOe}$, $H_y = H_z = 0$ für Rechtslauf, Linkslauf und stehenden Kreisel nur unwesentlich voneinander abweichen). Dieses Polpaar verkörpert also nicht das Feld eines Induktionsstromes, sondern es kommt durch eine Aufmagnetisierung des Kreisels zustande. Ich möchte es — zum Unterschied von dem zuerst beschriebenen Polpaar — als „Magnetisierungs-Polpaar“ bezeichnen.

Die Phasenverschiebung des „induzierten Polpaares“. Während Abb. 5 das Feld des im stehenden Kreisel hervorgerufenen Magnetisierungs-Polpaares darstellte, zeigte Abb. 3 das Feld, das bei Rotation des Kreisels gemessen wurde. Es müßte hier also eine Überlagerung der Felder des induzierten und des Magnetisierungs-Polpaares vorliegen, so daß eine Subtraktion der in beiden Abbildungen eingezeichneten Vektoren voneinander das Feld des induzierten Polpaares allein ergeben müßte.

verläuft bei Rechtslauf bei etwa $-2,5$ mOe, bei Linkslauf bei etwa $-1,0$ mOe. Die Schnittpunkte liegen fast genau bei 0° , 90° , 180° und 270° . An diesen Stellen wäre $h_x = 0$ (das Kreiselfeld werde stets mit h_{xyz} bezeichnet), wenn die Mittellage der Kurven mit der Nulllinie übereinstimmte. — Wenn man in analoger Weise Kurven für h_y zeichnet, so liegen hier die Extremwerte bei 0° , 90° , 180° und 270° , was auf Grund der Abb. 3 zu erwarten war. Der geringe Unterschied zwischen der Mittellage der h_y -Kurven und der Nulllinie zeigt, daß die Achse des Polpaares in Abb. 3 nicht genau nach $-Y$ weist.

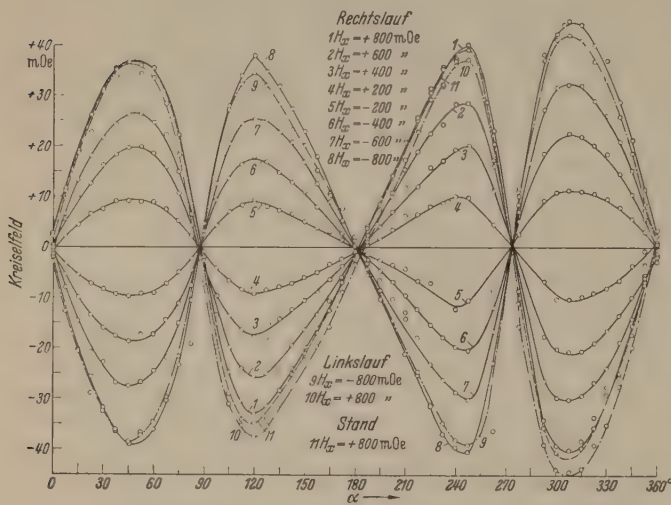


Abb. 9. Kreiselfeld (Kreis 18): Y-Komponente in der Horizontalebene; Variation von H_x bei $H_z = 0$ mOe

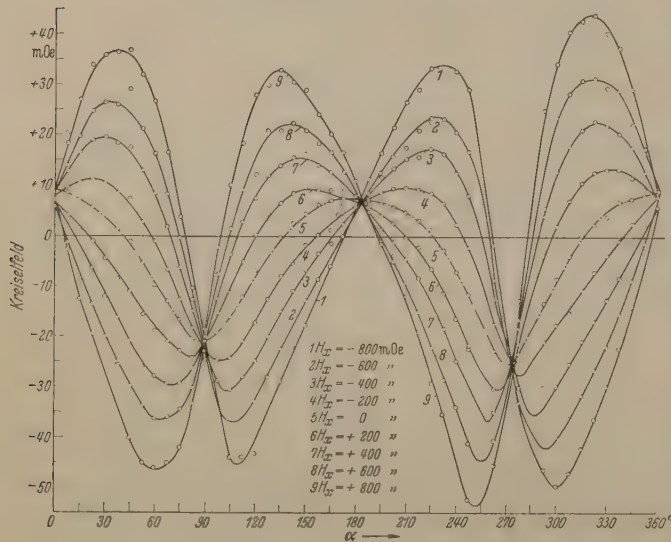


Abb. 10. Kreiselfeld (Kreis 18): Y-Komponente in der Horizontalebene; Variation von H_x bei $H_z = +400$ mOe Rechtslauf.

In Abb. 8 sollte vor allem gezeigt werden, daß die zusammengehörigen Extremwerte der Kurven — und zwar sowohl bei Rechts- als auch bei Linkslauf — denselben Winkelwerten zugeordnet sind. Weiter ist wesentlich, daß die Beträge der Extrema — von der Mittellinie der Kurven an gerechnet — dem äußeren Feld proportional sind.

Einwirken des „äußeren Feldes“ in Y-Richtung. Die Y-Achse des Koordinatensystems verläuft — ebenso wie die Z-Achse — parallel zur Ebene des Kreisels. Aus Symmetriegründen ist daher zu erwarten, daß beide Komponenten des äußeren Feldes ein glei-

ches System von Polpaaren hervorrufen werden. Das ist in der Praxis auch der Fall. Besitzt das äußere Feld nur eine Y-Komponente, so entstehen dieselben Polpaare, die für $H_z \neq 0$ soeben beschrieben wurden, jedoch um 90° gedreht. Da die entsprechenden Kurven dieselben Merkmale zeigen wie die der Abb. 8, möge auf ihre Wiedergabe hier verzichtet werden.

Einwirken des äußeren Feldes parallel zur Drehachse. Besitzt das äußere Feld lediglich eine parallel zur Kreiselachse gerichtete Komponente, so werden die Verhältnisse anders, als wenn dieselbe parallel zur Kreiselebene verläuft. Zwar entsteht jetzt auch ein Magnetisierungs-Polpaar, jedoch kein induziertes. Die vom äußeren Feld hervorgerufenen EMKs können sich nämlich nicht ausgleichen, wie es bei der Unipolarmaschine der Fall ist, so daß es nur zu einer Potentialdifferenz zwischen Kreiselmitte und -rand kommt.

Abb. 9 zeigt das Feld dieses Magnetisierungs-Polpaares in der Horizontalebene, und zwar seine Y-Komponente. Die Kurven zeigen dieselben Merkmale wie die in Abb. 8, ihre Schnittpunkte liegen bei 0° , 90° , 180° und 270° . Analoge Kurven für h_x besitzen hier Extremwerte, wie man es bei der räumlichen Lage des Polpaares erwarten muß. Es sei besonders auf die Unterschiede zwischen den Kurven bei Rechtslauf, Stand und Linkslauf hingewiesen, doch wird hierauf noch näher einzugehen sein.

Die vektorielle Addition der Dipolmomente der Polpaare. Wenn man ein äußeres Feld gleichzeitig in der X- und in der Z-Richtung einschaltet, so müssen sich die Momente der Polpaare, die hierdurch entstehen, einander nach den Gesetzen der Vektoraddition überlagern. Abb. 10 zeigt das Feldbild — abermals die Y-Komponente — für ein konstantes $H_z = +400$ mOe bei Variation von H_x . Die gestrichelte Kurve gilt für $H_x = 0$, $H_z = +400$ mOe; sie gibt also den Einfluß der R-Komponente des von H_z induzierten Polpaares m_{ziR} wieder. Sobald nun $H_x \neq 0$ gemacht wird, tritt hierzu das von H_x hervorgerufene Magnetisierungs-Polpaar. Es ist sehr gut zu sehen, wie sich die Lage der Extrema bei Steigerung von H_x immer mehr von derjenigen bei $H_x = 0$ entfernt; dies geschieht bei Feldern von gleicher Stärke jedoch entgegengesetzter Richtung symmetrisch zu den Extremwerten bei $H_x = 0$.

Die Verschiebung der Extremwerte bedeutet eine Drehung des in der Horizontalebene liegenden „Gesamt-Polpaares“. Geht man von der R-Komponente des induzierten Polpaares aus, der sich das Magnetisierungs-Polpaar in immer stärkerem Maß überlagert, so gilt für den Drehungswinkel ϑ :

$$\operatorname{tg} \vartheta = m_{xA} / m_{ziR}.$$

Die Gültigkeit dieser Beziehung konnte an einer Reihe von Beispielen geprüft werden. Dabei wurden für $H_z = +400$ mOe bei Variation von H_x verschiedene Zeichnungen der Horizontalkreise nach Art der Abb. 3 angefertigt und die Drehung der Achse des Polpaares, das sich an Hand der Feldvektoren konstruieren läßt, gemessen.

Die additive Überlagerung der Felder der Polpaare läßt sich auch gut verfolgen, wenn man z. B. die Meßwerte der Y-Komponente für $H_x = 0$, $H_z = +400$ mOe zu denen bei $H_x = +600$ mOe, $H_z = 0$ addiert und der Summe die Meßwerte bei $H_x = +600$ mOe, $H_z = +400$ mOe gegenüberstellt. Die Differenz zwi-

hen beiden ist so klein, daß sie sicherlich auf Meßfehler zurückzuführen ist. Hierauf deutet auch der häufige Vorzeichenwechsel der Differenz hin.

Das Relativverhältnis, in dem die Momente der Polpaare zueinander stehen. Um alle Vorgänge quantitativ behandeln zu können, ist es notwendig, das Verhältnis kennen, in dem die magnetischen Momente der einzelnen Polpaare zueinander stehen. Es ist leicht möglich, die relative Größe der Vektoren zueinander den vorhergehenden Abbildungen zu entnehmen. Da durch die Experimente in der Wingst eine große Anzahl von Messungen zur Verfügung stand — es wurden 50 000 Meßwerte aufgezeichnet —, konnten durch Mittelwertbildung die Relativverhältnisse der Momente der Polpaare recht gut bestimmt werden. Wenn man das Moment der *R*-Komponente des induzierten Pols als Einheit wählt, so ergibt sich — gleiche Stärke der erzeugenden Feldkomponenten vorausgesetzt — für den Kreisler 18:

$m_{zA} = 1,8$ (Auf-)Magn.-Polpaar, von H_x erzeugt

$m_{yA} = m_{zA} = 4,0$ (Auf-)Magn.-Polpaar, von H_y bzw. H_z erzeugt

$m_{zR} = m_{zIR} = 1,0$ *R*-Komp. des induz. Polp., von H_y bzw. H_z erzeugt

$m_{yP} = m_{zIP} = 1,2$ *P*-Komp. des induz. Polp., von H_y bzw. H_z erzeugt.

Zusammenfassung der Vorgänge. Es sollen nun die Ergebnisse noch einmal zusammengestellt werden:

1. Magnetisierungs-Polpaare können nur ausgebildet werden, wenn der Kreisler aus ferromagnetischem Material besteht. Sie sind parallel zum äußeren Feld gerichtet und demselben proportional. Ihr magnetisches Moment ist unabhängig davon, ob der Kreisler steht oder steht.

2. Induzierte Polpaare entstehen nur dann, wenn der Kreisler rotiert, jedoch braucht er nicht aus einem ferromagnetikum zu bestehen. Ihre *R*-Komponente steht stets senkrecht auf dem äußeren Feld und der Drehachse, während ihre *P*-Komponente antiparallel zum äußeren Feld gerichtet ist. Induzierte Polpaare entstehen nur von einem äußeren Feld hervorgerufen werden, das in der Kreiselebene verläuft. Die zur Kreiselachse parallele Komponente von H ruft lediglich eine Potentialdifferenz zwischen Kreiselmitte und Rand hervor.

3. Die magnetischen Momente der induzierten und Magnetisierungs-Polpaare überlagern sich, wenn auf einen rotierenden Kreisler aus ferromagnetischen Material ein äußeres Magnetfeld von beliebiger räumlicher Richtung einwirkt. Ist $H_x = H_y = H_z > 0$, so entstehen in Richtung der Koordinatenachsen folgende Momente der Polpaare:

X-Richtung:

$$m_{zA} = +1,8.$$

Y-Richtung:

$$m_{zA} - m_{zIR} - m_{yIP} = 4,0 - 1,0 - 1,2 = +1,8.$$

Z-Richtung:

$$m_{zA} + m_{yIR} - m_{zIP} = 4,0 + 1,0 - 1,2 = +3,8.$$

Diese Zahlwerte beziehen sich auf die Relativverhältnisse der Polpaare. Um die magnetischen Momente zu erhalten, müssen sie noch mit einer Konstanten multipliziert werden, die später näher erläutert wird.

C. Die Effekte zweiter Ordnung.

Durch die in Abschnitt B geschilderten Versuche und ihre Ergebnisse dürften die Vorgänge bei Kreisel, die in einem Magnetfeld rotieren, im Wesentlichen geklärt sein. Es liegt in der Natur der Sache, daß auch Effekte zweiter Ordnung auftreten werden. Da dieselben nur kleine Korrekturen der bereits beschriebenen Vorgänge verursachen dürften, war ihre Aufklärung nicht das eigentliche Ziel der vorliegenden Arbeit. Sie mögen daher nur kurz gestreift werden, soweit die geschilderten Ergebnisse dies notwendig erscheinen lassen.

a) Unterschiede in den bei Rechts- und Linkslauf aufgenommenen Kurven.

In Abb. 8 und 9 sind Kurven eingezeichnet, die bei Rechts- und Linkslauf des Kreisels aufgenommen wurden. Einander entsprechende Kurven (z. B. Kurve 1 und 10 in Abb. 9) besitzen zwar dieselbe Form, jedoch zeigen die an den einzelnen Meßpunkten ermittelten Feldwerte z. T. verhältnismäßig große Abweichungen voneinander. Weiter fällt auf, daß die Kurve 11 in Abb. 9, die für „stehenden Kreisler“ aufgenommen wurde, meist etwa in der Mitte zwischen den Kurven für Rechts- bzw. Linkslauf liegt. Demnach muß die Rotation des Kreisels von Einfluß auf diese Erscheinung sein.

Der Kreisler stellt den Rotor eines Asynchron-Drehstrommotors dar. Während des Betriebes ist also stets ein Drehfeld an die Statorwicklung gelegt. Es wäre möglich, daß die Bahnen der durch das äußere Feld hervorgerufenen Induktionsströme bzw. das im Kreisler durch Aufmagnetisierung entstehende Feld durch die vom Stator ausgehenden Felder (und damit auch durch die Stromrichtung im Stator) etwas beeinflußt werden.

Für diese Annahme spricht auch folgende Überlegung: Die Kurven für Rechtslauf lassen sich meist durch eine Parallelverschiebung in diejenigen für Linkslauf überführen. Wenn eine Drehung des im Kreisler entstandenen Polpaares vorläge (bei den Verhältnissen der Abb. 8 könnte sie etwa dadurch entstehen, daß durch die Rotation ein Feld in Richtung der Drehachse hervorgerufen würde: Barnett-Effekt), dann müßte die Differenz zwischen den Kurven abwechselnd positiv und negativ sein, wie z. B. bei den Kurven 5 und 6 oder 5 und 4 in Abb. 10. Bei der besonderen Form, die der Kreisler besitzt, könnte es jedoch sein, daß das jeweils betrachtete Polpaar nicht genau durch den Kreiselmittelpunkt verläuft. Darauf deuten auch die in dem oberen Vertikalkreis der Abb. 3 eingezeichneten Vektoren hin. Das Polpaar, dessen Feld durch sie dargestellt wird, steht nicht genau vertikal bzw. ist aus der Kreiselmitte etwas nach $-X$ herausgerückt. Wenn man die erwähnten Vektoren für Rechts- bzw. Linkslauf für verschiedene äußere Felder aufträgt, so zeigen sich stets Unterschiede in ihrem Neigungswinkel gegen die Vertikale, was eine Änderung der Lage des Polpaares im Kreisler bei Umkehr des Drehsinns bedeutet.

b) Die „drehende Hysterese“.

Wenn ein Magnetfeld parallel zur Ebene einer Scheibe aus ferromagnetischem Material einwirkt, dann wird die Scheibe in Feldrichtung magnetisiert. Rotiert sie jedoch um eine zur Feldrichtung senkrechte

Achse, so entsteht zwischen der Magnetisierungs- und Feldrichtung ein Winkel. Diese Erscheinung bezeichnet man als „drehende Hysterese“ [13]. Sie läßt sich auch beim Kreisel nachweisen, was an Hand der Abb. 3 geschehen möge.

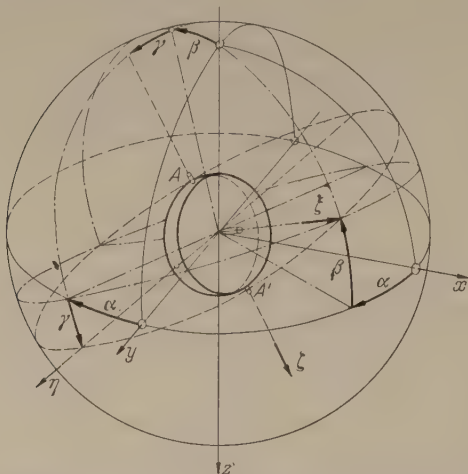


Abb. 11. Drehung des mit der Kreiselhängung verbundenen Koordinatensystems gegen das raumfeste System.

Betrachtet man den unteren der beiden vertikalen Halbkreise, so fällt auf, daß das Polpaar — dessen Feld durch die eingetragenen Vektoren gekennzeichnet wird — nicht vertikal steht, sondern nach Osten geneigt ist. Da der Kreisel im Rechtssinn rotiert, ist

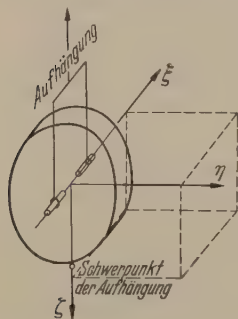


Abb. 12. Schematische Darstellung des mit der Kreiselhängung verbundenen Koordinatensystems.

diese Abweichung auf Grund der drehenden Hysterese zu erwarten. Bei Linkslauf des Kreisels erfolgt die Abweichung im entgegengesetzten Sinn. Es liegen zu wenige Messungen vor, um quantitative Ergebnisse ermitteln zu können, jedoch ergibt sich die Größenordnung richtig mit einigen Grad.

D. Die Erweiterung der Kreisgleichungen.

Die in Abschnitt B behandelten Polpaare besitzen das magnetische Moment \mathcal{M} . Aus dem Zusammenwirken von \mathcal{M} mit dem äußeren Magnetfeld ζ resultiert das Drehmoment

$$\mathcal{M} = [\mathcal{M} \zeta]_z. \quad (1)$$

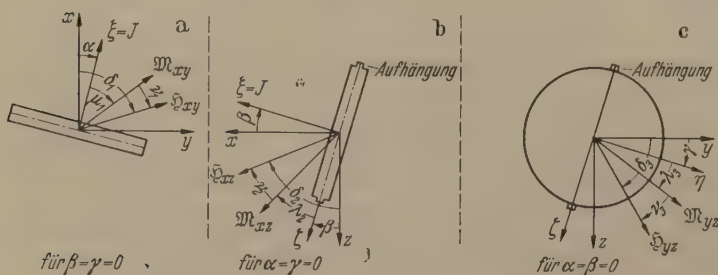


Abb. 13. Schematische Darstellung der Winkelbeziehungen.

Für die weiteren Rechnungen werde folgendes Koordinatensystem zugrunde gelegt.: Die X-Achse weise nach astronomisch Nord, die Y-Achse nach Osten und die Z-Achse vertikal nach unten.

Da im Folgenden die Bewegungen von Kreiseln beschrieben sind, mögen zunächst die in der Kreisellehre üblichen Winkel α , β und γ definiert werden. Vom raumfesten System ausgehend ist (Abb. 11)

α = Winkel zwischen der Projektion der Impulsachse auf die Horizontalebene und der Nordrichtung. sei dann positiv, wenn sich das Nordende der Kreiselachse nach Osten aus der Richtung der Meridians herausbewegt.

β = Winkel zwischen der Impulsachse und ihrer Projektion auf die Horizontalebene (von dem Auftreten eines konstanten Restwinkels β_R , der auch bei ruhendem Kreisel vorhanden ist, sei hier abgesehen). β soll dann positiv gezählt werden, wenn sich das positive Ende der Kreiselachse (zu dem der Impulsvektor weist) aus der Horizontalebene erhebt.

γ = Winkel zwischen dem Äquator der Aufhängung des Kreisel systems und seiner Projektion auf die Horizontalebene, gemessen in der Ebene senkrecht zur Kreiselweisung. γ soll positiv sein, wenn sich der Ostteil des Äquators der Hängung gegenüber der Horizontalebene senkt.

Außer dem raumfesten Koordinatensystem muß aber noch ein System eingeführt werden, daß die Bewegungen der Aufhängung des Kreisels mitmacht. In diesem ist (vgl. Abb. 12) die

ξ -Achse = Impulsachse.

η -Achse = Achse, die mit der Impulsachse und der durch Kreiselmitte und Schwerpunkt der Hängung verlaufenden Geraden ein Dreiein bildet.

ζ -Achse = Achse durch den Kreiselmittelpunkt und den Schwerpunkt der Aufhängung.

(Bei den praktisch ausgeführten Kreiseln fällt die Impulsachse in erster Näherung mit der Figurenachs zusammen).

Ferner sei z. B. $|\zeta_{xy}|$ der Betrag des Vektors ζ in der XY-Ebene. Durch den Winkel δ_1 soll die Richtung von ζ_{xy} gekennzeichnet werden, und zwar werde δ_1 positiv von der X- zur Y-Achse gezählt (ebenso wie α). Durch die Winkel δ_2 bzw. δ_3 möge die Richtung von ζ_{zx} und ζ_{yz} in der ZX- bzw. YZ-Ebene angegeben werden. Diese Winkel sollen im gleichen Sinn positiv sein wie β und γ .

In gleicher Weise mögen die Komponenten von \mathcal{M} definiert werden. Da \mathcal{M} jedoch die Bewegungen der Kreiselhängung mitmacht, müssen auch die Winkel λ_1 , λ_2 und λ_3 , die die Richtung von \mathcal{M}_{xy} , \mathcal{M}_{zx} und \mathcal{M}_{yz} bezeichnen sollen, auf das Koordinatensystem bezogen werden, daß der Kreisel an der Hängung angeheftet ist, so daß

λ_1 = Winkel zwischen der Projektion der ξ -Achse auf die Horizontalebene und \mathcal{M}_{xy} .

λ_2 = Winkel zwischen der Projektion der ζ -Achse auf die ZX-Ebene und \mathcal{M}_{zx} .

λ_3 = Winkel zwischen der Projektion der η -Achse auf die YZ-Ebene und \mathcal{M}_{yz} .

Für die z-Komponente des Drehmomentes \mathcal{M} gilt:

$$N_z = \mathcal{M}_{xy} \cdot H_{xy} \cdot \sin(\mathcal{M}_{xy}, \zeta_{xy}) = \mathcal{M}_{xy} \cdot H_{xy} \cdot \sin \nu_1$$

$$N_z = \mathcal{M}_x \cdot H_y - \mathcal{M}_y \cdot H_x \quad (2)$$

bei nach Abb. 13:

$$v_1 = \angle (\mathfrak{M}_{xy}, \zeta_{xy}) = \delta_1 - (\alpha + \lambda_1). \quad (3)$$

Abb. 13 ergeben sich die Beziehungen:

$$\begin{aligned} N_x &= H_{xy} \cdot \cos \delta_1, & H_y &= H_{xy} \cdot \sin \delta_1, \\ N_y &= M_{xy} \cdot \cos (\lambda_1 + \alpha), & M_y &= M_{xy} \cdot \sin (\lambda_1 + \alpha). \end{aligned}$$

führt man dies in den letzten Teil der Gleichung (2) ein, so ergibt sich:

$$N_z = M_{xy} H_{xy} [\sin \delta_1 \cdot \cos (\lambda_1 + \alpha) - \cos \delta_1 \cdot \sin (\lambda_1 + \alpha)]. \quad (4)$$

Wenn man die hierin enthaltenen Additionswinkel auflöst und dabei berücksichtigt, daß es sich in der α -Ebene bei α stets um einen kleinen Winkel handelt, so daß $\sin \alpha = \alpha$ und $\cos \alpha = 1$ gesetzt werden kann, folgt

$$N_z = M_{xy} H_{xy} \cdot \sin (\delta_1 - \lambda_1) - M_{xy} H_{xy} \cdot \cos (\delta_1 - \lambda_1) \cdot \alpha. \quad (5)$$

Analoge Gleichungen für N_y und N_z lassen sich auf ähnliche Weise gewinnen.

Nun ist es jedoch notwendig, die Momente N_x , N_y und N_z in die Momente N_α , N_β und N_γ umzurechnen, an die letzteren wirken sich im Bewegungsvorgang des Kreisels aus. Zunächst sind die Momente N_ξ , N_η und N_ζ zu gewinnen. Diese lauten (vergl. [7]):

$$N_\xi = N_\alpha \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta - N_\beta \cdot \cos \gamma, \quad (6a)$$

$$N_\eta = N_\alpha \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta + N_\beta \cdot \sin \gamma, \quad (6b)$$

$$N_\zeta = N_\alpha \cdot \sin \beta + N_\gamma. \quad (6c)$$

Anschließend sind die N_x , N_y , N_z in die N_ξ , N_η , N_ζ zu transformieren. Diese Operation führt zu

$$N_x = N_\alpha [\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta] + N_y [-\cos \gamma \cdot \sin \alpha - \sin \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta] + N_z \cdot \sin \gamma \cos \beta. \quad (7a)$$

$$N_y = N_\alpha [-\cos \gamma \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta - \sin \alpha \cdot \sin \gamma] + N_y [-\cos \gamma \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta + \cos \alpha \cdot \sin \gamma] + N_z \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta. \quad (7b)$$

$$N_z = -N_x \cdot \cos \alpha \cdot \cos \beta - N_y \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta - N_z \cdot \sin \beta. \quad (7c)$$

Wenn man die Determinante von (6) bildet, so findet man ihren Wert zu $\cos \beta$. Ferner ergibt sich:

$$N_\alpha = \frac{1}{\cos \beta} [N_\xi \cdot \sin \gamma + N_\eta \cdot \cos \gamma]. \quad (8a)$$

$$N_\beta = \frac{1}{\cos \beta} [N_\eta \cdot \sin \gamma \cdot \cos \beta - N_\xi \cdot \cos \gamma \cdot \cos \beta]. \quad (8b)$$

$$N_\gamma = \frac{1}{\cos \beta} [-N_\xi \cdot \sin \gamma \cdot \sin \beta - N_\eta \cdot \cos \gamma \cdot \sin \beta + N_\zeta \cdot \cos \beta]. \quad (8c)$$

Setzt man aus den Gleichungen (7) in (8) ein, so folgt

$$N_\alpha = -N_x \cdot \sin \beta + N_z. \quad (9a)$$

$$N_\beta = N_y - N_x \cdot \sin \alpha. \quad (9b)$$

$$N_\gamma = -N_x - N_y \cdot \sin \alpha - 2 N_z \cdot \sin \beta. \quad (9c)$$

Damit erlangt man die Drehmomente:

$$M_x = M_{xy} H_{xy} \cdot \sin (\delta_1 - \lambda_1) - M_{xy} H_{xy} \cdot \cos (\delta_1 - \lambda_1) \cdot \alpha - M_{yz} H_{yz} \cdot \sin (\delta_3 - \lambda_3) \cdot \beta. \quad (10a)$$

$$M_y = M_{xz} H_{xz} \cdot \sin (\delta_2 - \lambda_2) - M_{xz} H_{xz} \cdot \cos (\delta_2 - \lambda_2) \cdot \beta - M_{yz} H_{yz} \cdot \sin (\delta_3 - \lambda_3) \cdot \alpha. \quad (10b)$$

sowie

$$\begin{aligned} N_\gamma &= -M_{yz} H_{yz} \cdot \sin (\delta_3 - \lambda_3) \\ &+ M_{yz} H_{yz} \cdot \cos (\delta_3 - \lambda_3) \cdot \gamma \\ &- M_{xz} H_{xz} \cdot \sin (\delta_2 - \lambda_2) \cdot \alpha \\ &- 2 M_{xy} H_{xy} \cdot \sin (\delta_1 - \lambda_1) \cdot \beta. \end{aligned} \quad (10c)$$

Diese Momente brauchen nun nur noch in die FÖPPL'schen Kreiselgleichungen eingeführt zu werden (deren Ableitung z. B. in [14], weitere Literatur in [1]), welche lauten:

$$A \cdot \alpha'' + J \cdot \beta' + J \cdot \omega \cdot \cos \varphi \cdot \alpha = N_\alpha. \quad (11a)$$

$$B \cdot \beta'' - J \cdot \alpha' - J \cdot \omega \cdot \sin \varphi + G \cdot \beta = -N_\beta. \quad (11b)$$

Dazu kommt noch die Gleichung, die die Momente um die Figurenachse wiedergibt:

$$C_{Ku} \cdot \gamma'' + G \cdot \gamma - J' = N_\gamma. \quad (11c)$$

In den Gleichungen (11) bedeuten:

A = Trägheitsmoment des Kreisels und seiner Aufhängung um die Vertikale.

B = Trägheitsmoment des Kreisels und seiner Aufhängung um die Knotenlinie.

C_{Ku} = Trägheitsmoment der Aufhängung (beim Meridianweiser: der Kreiselkugel) um die Impulsachse.

C_{Kr} = Trägheitsmoment des Kreisels um die Impulsachse.

J = $C_{Kr} \cdot \omega_{Kr}$ = Drehimpuls des Kreisels.

m = Masse des schwimmenden oder schwebenden Systems.

g = Schwerebeschleunigung der Erde.

a = Abstand vom Schwerpunkt zum Aufhängepunkt des Kreisel systems.

G = $m \cdot g \cdot a$ = Schweremoment.

ω = Winkelgeschwindigkeit der Erde.

ω_{Kr} = Winkelgeschwindigkeit des Kreisels.

φ = Geographische Breite des Aufstellungsortes.

Bei den in der Praxis ausgeführten Kreiseln ist $B \cdot \beta''$ so klein, daß es vernachlässigt werden kann.

Wenn man in (11) die N_α , N_β , N_γ durch die aus (10) gewonnenen Werte ersetzt, so hat man die Gleichungen der Schwingungen vor sich, die der Kreisel mit seiner Hängung in der α -, β - und γ -Ebene ausführt. Ihre Ruhelage ergibt sich, wenn die in ihnen enthaltenen Differentialquotienten verschwinden. Für diesen Fall erhält man:

$$\alpha_0 = \frac{M_{xy} H_{xy} \cdot \sin (\delta_1 - \lambda_1) - M_{yz} H_{yz} \cdot \sin (\delta_3 - \lambda_3) \cdot \beta}{J \cdot \omega \cdot \cos \varphi + M_{xy} H_{xy} \cdot \cos (\delta_1 - \lambda_1)} \quad (12a)$$

$$\beta_0 = \frac{J \cdot \omega \cdot \sin \varphi - M_{xz} H_{xz} \cdot \sin (\delta_2 - \lambda_2) + M_{yz} H_{yz} \cdot \sin (\delta_3 - \lambda_3) \cdot \alpha}{G - M_{xz} H_{xz} \cdot \cos (\delta_2 - \lambda_2)} \quad (12b)$$

$$\gamma_0 = -\frac{M_{yz} H_{yz} \cdot \sin (\delta_3 - \lambda_3) + M_{xz} H_{xz} \cdot \sin (\delta_2 - \lambda_2) \cdot \alpha}{G - M_{yz} H_{yz} \cdot \cos (\delta_3 - \lambda_3)} - \frac{2 M_{yz} H_{yz} \cdot \sin (\delta_1 - \lambda_1) \cdot \beta}{G - M_{yz} H_{yz} \cdot \cos (\delta_3 - \lambda_3)} \quad (12c)$$

(11a) und (11b) sind gekoppelte Differentialgleichungen. Sie lassen sich lösen, indem man (11b) nach β auflöst, nochmals nach der Zeit differenziert und in (11a) einsetzt. Das ergibt:

$$K_1 \cdot \alpha'' + K_2 \cdot \alpha' + K_3 \cdot \alpha + K_4 = 0 \quad (13)$$

$$\text{mit} \quad K_1 = A + \frac{J^2}{G - M_{xz} H_{xz} \cdot \cos(\delta_2 - \lambda_2)} \quad (13a)$$

$$K_2 = \frac{2J \cdot M_{yz} H_{yz} \cdot \sin(\delta_3 - \lambda_3)}{G - M_{xz} H_{xz} \cdot \cos(\delta_2 - \lambda_2)} \quad (13b)$$

$$K_3 = J \cdot \omega \cdot \cos \varphi + M_{xy} H_{xy} \cdot \cos(\delta_1 - \lambda_1) + \frac{[M_{yz} H_{yz} \cdot \sin(\delta_3 - \lambda_3)]^2}{G - M_{xz} H_{xz} \cdot \cos(\delta_2 - \lambda_2)} \quad (13c)$$

$$K_4 = M_{xy} H_{xy} \cdot \sin(\delta_1 - \lambda_1) + \frac{J \cdot \omega \cdot \sin \varphi}{G - M_{xz} H_{xz} \cdot \cos(\delta_2 - \lambda_2)} - \frac{[M_{yz} H_{yz} \cdot \sin(\delta_3 - \lambda_3)] \cdot [M_{xz} H_{xz} \cdot \sin(\delta_2 - \lambda_2)]}{G - M_{xz} H_{xz} \cdot \cos(\delta_2 - \lambda_2)} \quad (13d)$$

Diese Gleichungen sollen zunächst vereinfacht werden. Das ist leicht möglich, wenn man für die Kreiselkonstanten ihre Zahlwerte einsetzt. Beim Meridianweiser sind:

$$J = 8,7 \cdot 10^7 \text{ cm}^2 \cdot g \cdot \text{sec}^{-1}$$

$$G = m \cdot g \cdot a = 2,92 \cdot 10^7 \cdot \text{cm}^2 \cdot g \cdot \text{sec}^{-2}$$

$$J^2/G = 2,5 \cdot 10^8 \text{ cm}^2 \cdot g$$

$$A = 4,3 \cdot 10^5 \text{ cm}^2 \cdot g$$

$$J \cdot \omega \cdot \cos \varphi = 3,9 \cdot 10^3 \text{ cm}^2 \cdot g \cdot \text{sec}^{-2} \quad (\text{für die geogr. Breite von Clausthal}).$$

Mit Hilfe der Überlegungen, die in Abschnitt E, a) zu der Berechnung der Mißweisung des Meridianweisers bei einem gegebenen äußeren Feld führen, wurde für $H_{xy} = 1 \text{ Oe}$, $H_z = 0,5 \text{ Oe}$ als Maximalwert berechnet für $M_{xy} H_{xy} \cdot \cos(\delta_1 - \lambda_1) \rightarrow 31 \text{ cm}^2 \cdot g \cdot \text{sec}^{-2}$

$$M_{xz} H_{xz} \cdot \cos(\delta_2 - \lambda_2) \rightarrow 43 \text{ cm}^2 \cdot g \cdot \text{sec}^{-2}$$

$$M_{yz} H_{yz} \cdot \sin(\delta_3 - \lambda_3) \rightarrow 21 \text{ cm}^2 \cdot g \cdot \text{sec}^{-2}.$$

Führt man diese Zahlwerte in (13) ein, so ist in (13a) $M_{xz} H_{xz} \cdot \cos(\delta_2 - \lambda_2) \ll G$, ebenfalls natürlich in (13b), (13c), (13d). Ferner ist $A \ll J^2/G$. In (13c) ist der Zähler des 3. Terms der rechten Seite klein gegen den Nenner, so daß der ganze Term vernachlässigt werden kann. Dasselbe gilt für den 2. und 3. Term der rechten Seite von (13d).

Bei der Lösung von (13) ergibt sich der Faktor $\exp \left\{ -\frac{K_2}{2K_1} \cdot t \right\}$. Mit den obigen Zahlwerten kann man dies schreiben als

$$\frac{2J \cdot M_{yz} H_{yz} \cdot \sin(\delta_3 - \lambda_3)}{G} \cdot \frac{G}{2J^2} = \frac{M_{yz} H_{yz} \cdot \sin(\delta_3 - \lambda_3)}{J} \approx \frac{1}{4 \cdot 10^6}.$$

Damit ist der e-Faktor fast genau gleich 1.

Es muß jedoch an dieser Stelle darauf hingewiesen werden, daß bei anderen Vermessungskreiseln als dem Meridianweiser infolge neuer (z. B. kleinerer) Kreiselkonstanten bzw. höherer magnetischer Größen die hier eingeführten Vernachlässigungen unzulässig werden können. Auch beim Meridianweiser kann beim Einwirken sehr starker Magnetfelder (z. B. $H_{xy} = 5 \text{ Oe}$; „stark“ im Vergleich mit dem Erdfeld) der Betrag von $M_{xy} H_{xy} \cdot \cos(\delta_1 - \lambda_1)$ derart anwachsen, daß er fast dieselbe Größenordnung wie $J \cdot \omega \cdot \cos \varphi$ erreicht (in dem erwähnten Fall würde $M_{xy} H_{xy} \cdot \cos(\delta_1 - \lambda_1)$ maximal $1032 \text{ cm}^2 \cdot g \cdot \text{sec}^{-2}$ sein). Sind jedoch die obigen Vernachlässigungen erlaubt, so lautet die Lösung von (13):

$$\alpha \cong \alpha_0 + \alpha_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{G \cdot \omega \cdot \cos \varphi}{J}} \cdot t + \alpha_2 \cdot \sin \sqrt{\frac{G \cdot \omega \cdot \cos \varphi}{J}} \cdot t. \quad (14)$$

Das hierin enthaltene α_0 stimmt mit (12a) überein, wenn man im Zähler von (12a) den 2. Term gegen den vernachlässigt. Dies wird stets möglich sein, da der 2. Term (dessen Betrag ohnehin klein ist) den — immer kleinen — Winkel β als Faktor enthält.

Die zu (14) gehörige Schwingungsdauer ist

$$T \cong 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{G \cdot \omega \cdot \cos \varphi}}. \quad (15)$$

Setzt man aus (14) in (11b) ein, so erhält man:

$$\beta \cong \beta_0 - \alpha_1 \cdot \frac{J}{G - M_{xz} H_{xz} \cdot \cos(\delta_2 - \lambda_2)} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot \omega \cdot \cos \varphi}{J}} \cdot \sin \sqrt{\dots} \cdot t \quad (16)$$

wobei wiederum β_0 mit (12b) übereinstimmt, wenn man den letzten Term des Zählers von (12b) vernachlässigt. (16) stellt nicht die allgemeinste Lösung dar, sondern es ist $\alpha_2 = 0$ gesetzt. Nimmt man wieder die selben Vereinfachungen vor, so wird:

$$\beta \cong \beta_0 - \alpha_1 \cdot \sqrt{\beta_0' \cdot \text{ctg} \varphi} \cdot \sin \sqrt{\frac{G \cdot \omega \cdot \cos \varphi}{J}} \cdot t \quad (16a)$$

$$\text{Hierin ist } \beta_0' = \frac{J \cdot \omega \cdot \sin \varphi}{G}.$$

Vernachlässigt man in (12b) auch das Glied

$$M_{xz} H_{xz} \cdot \sin(\delta_2 - \lambda_2) \text{ gegen } J \cdot \omega \cdot \sin \varphi,$$

so wird $\beta_0' \cong \frac{J \cdot \omega \cdot \sin \varphi}{G}$, so daß $\beta_0 \cong \beta_0'$. — Mit diesen Vereinfachungen erhält man eine Gleichung für β , die der in früheren Arbeiten entspricht (z. B. [7], Gl. (8)).

Eine Verknüpfung von (14) und (16a) liefert

$$\frac{(\beta - \beta_0')^2}{\alpha_1^2 \cdot \beta_0' \cdot \text{ctg} \varphi} + \frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{\alpha_1^2} = 1. \quad (17)$$

Das Nordende der Kreiselachse beschreibt eine Ellipse, deren Achsen sich wie $1 : \sqrt{\beta_0' \cdot \text{ctg} \varphi}$ verhalten. Auch dieses Ergebnis findet sich in [7] oder [14].

Es sei noch auf die Gleichung für γ eingegangen. Diese lautet mit den bereits eingeführten Vernachlässigungen:

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 \cdot \cos \sqrt{\frac{G - M_{yz} H_{yz} \cdot \cos(\delta_3 - \lambda_3)}{C_{Ku}}} \cdot t + \gamma_2 \cdot \sin \sqrt{\dots} \cdot t. \quad (18)$$

Im Ganzen ist festzustellen: Am stärksten unterscheidet sich die Gleichung für α — durch das Glied α_2 — von den Gleichungen, die ohne Berücksichtigung des Einflusses des äußeren Magnetfeldes gewonnen werden. Es treten zwar in sämtlichen Gleichungen Terme auf, die diesen Einfluß wiedergeben, doch werden sie meist gegen die Kreiselkonstanten vernachlässigt werden können. Die Änderung in α wird jedoch stets berücksichtigt werden müssen.

α_0 ist der Winkel, um den die Gleichgewichtslage der Schwingungen des Kreisels — die er um die Vertikale als Drehachse ausführt — infolge des Auftretens der Störglieder mit M und H gegenüber der des „Normalfeldes“ geändert ist. Wenn keine magnetischen Störungen vorhanden sind (die durch andere Ursachen möglichen Störungen seien hier außer acht gelassen), so fällt die Gleichgewichtslage der Kreisel schwingungen mit der Richtung des Meridians zusammen. α_0 gibt also unmittelbar die Fehlweisung des Kreisels an.

E. Diskussion praktischer Beispiele.

a) Das Experiment mit der Ablenkspule und die entsprechende theoretisch berechnete Kurve.

Die Richtigkeit der in Abschnitt D entwickelten Theorie ist noch zu prüfen. Das möge an Hand eines Experimentes geschehen, das folgendermaßen verlief:

Unter dem Meridianweiser wurde eine Eisenkernspule derart aufgebaut, daß die Spulenachse unter der Mitte des Kreisels lag. Bei horizontaler Spulenachse wurde die Spule successive von 0° bis 360° gedreht und für jede Spulenstellung eine Messung mit dem Meridianweiser durchgeführt.

Das Ergebnis dieses Versuches zeigt Abb. 14b. Sie besitzt als Abszisse den Winkel zwischen der Spulenachse und astronomisch Nord in Grad und als Ordinate die Weisungsabweichung gegenüber der ohne magnetischem Störfeld gemessenen Richtung in Bogenminuten. Die hier wiedergegebenen Kurven sind sämtlich bei einem Ablenkbereich aufgenommen, das in ungestörtem Zustand etwa 1100 mOe am Ort der Kreiselachse betragen würde. Das Spulenfeld, das ohnehin sehr inhomogen ist, erleidet Verzerrungen durch die Ferromagnetika des Meridianweisers. Resonanzeffekte, die von diesen Ferromagnetika herrühren, sind die Ursache dafür, daß die Kurven einen gewissen Streubereich besitzen. Ihre Form jedoch ist sicher reproduzierbar.

Die bei dem geschilderten Experiment auftretenden Verhältnisse sollen nun rechnerisch erfaßt werden. Wesentlich ist die Berechnung von N_z , denn wenn man in (12a) die in Abschnitt D diskutierten Vereinfachungen einführt, dann ergibt sich der Fehlerwinkel

$$\alpha_0 \cong N_z / K_1 \quad (19)$$

mit

$$K_1 = J \cdot \omega \cdot \cos \varphi = 3,9 \cdot 10^3 \text{ cm}^2 \cdot g \cdot \text{sec}^{-2}. \quad (19a)$$

Im Experiment war H_z mit der Vertikalkomponente des Erdfeldes identisch. H_{xy} wurde durch die Horizontalintensität des Ablenkbereiches gegeben, war also ebenfalls konstant und gleich 1,1 Oe (die Horizontalintensität des Erdfeldes ist in der folgenden Rechnung vernachlässigt, weil der durch sie hervorgerufene Fehlerwinkel in den Eichwert des Gerätes eingeht). Da die Ablenkspule gedreht wurde, ließ sich H_{xy} in $I_x = \cos \delta$ und $H_y = \sin \delta$ aufspalten, wobei δ den Winkel zwischen der Spulenachse und der Nordrichtung bedeutet.

In N_z sind die magnetischen Momente M_x und M_y zu bestimmen. Das magnetische Moment der Polpaare hängt sicher von den Materialeigenschaften des Rotationskörpers ab, also der Permeabilität μ und der spezifischen Leitfähigkeit κ . Ferner wird es eine Funktion der Winkelgeschwindigkeit ω_{Kr} und des äußeren Feldes \mathfrak{H} sein (da die Dipolmomente der einzelnen Polpaare von der Stärke derjenigen Komponente von \mathfrak{H} abhängen, der sie ihr Entstehen verdanken. Je nach dem Werkstoff, aus dem der Rotationskörper besteht, wird μ gemäß der Hysteresiskurve eine Funktion von \mathfrak{H} sein). Ferner wird M von den Liniendimensionen l des Rotationskörpers abhängen, so daß man

schreiben kann:

$$M = f(\omega_{Kr}; \mu; \kappa; l; H). \quad (20)$$

Da die Stoffkonstanten sowie die Umdrehungsgeschwindigkeit für alle Polpaare des Kreisels dieselben sind, kann man schreiben:

$$M = K_2 \cdot H, \quad (20a)$$

wobei K_2 eine Konstante darstellt, deren Wert noch zu bestimmen ist, und H diejenige Komponente des äußeren Feldes, die das jeweils betrachtete Polpaar hervorruft. Es sind noch die Proportionalitätsfaktoren a , b , c und d einzuführen, die von den Relativverhältnissen der magnetischen Momente der einzelnen Polpaare abhängen, und zwar bezieht sich

- a auf das von H_x hervorgerufene Magnetisierungs-Polpaar m_{xA} ($a = 1,8$),
- b auf das von H_y hervorgerufene Magnetisierungs-Polpaar m_{yA} ($b = 4,0$)
- c auf die P -Komp. des von H_y induzierten Polpaares m_{yIP} ($c = 1,2$),

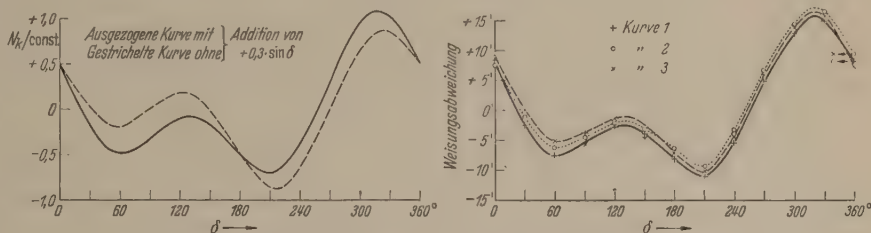


Abb. 14. Abhängigkeit der Weisung von der Richtung des Ablenkbereiches.

a) Mittels Gl. (21b) berechnete Kurven. b) Experimentelle Kurven. δ = Winkel zwischen der Richtung des Ablenkbereiches und der Nordrichtung.

- d auf die R -Komp. des von H_z induzierten Polpaares m_{zIR} ($d = 1,0$)

(es brauchen nur die Polpaare betrachtet zu werden, die in der Horizontalebene liegen, da nur diese in N_z eingehen).

In der X -Richtung des gewählten Koordinatensystems liegt nur das Polpaar m_{xA} , so daß

$$M_x = (a \cdot H_x) \cdot K_2.$$

In der Y -Richtung verlaufen die Polpaare m_{yA} , m_{yIP} und m_{zIR} , und zwar ist bei $H_y > 0$ m_{yA} nach $+Y$ gerichtet, während m_{yIP} und m_{zIR} antiparallel dazu stehen. Danach ergibt sich

$$M_y = (H_y \cdot b - H_y \cdot c - H_z \cdot d) \cdot K_2.$$

Für N_z findet man:

$$N_z = K_2 \cdot [H_x \cdot a \cdot H_y - (H_y \cdot b - H_y \cdot c - H_z \cdot d) \cdot H_x], \quad (21)$$

$$N_z / K_2 = H_x \cdot H_y \cdot (a + c - b) + H_z \cdot H_x. \quad (21a)$$

Setzt man hierin die obigen Zahlwerte ein, so erhält man

$$N_z / K_2 = -\sin \delta \cdot \cos \delta + 0,5 \cdot \cos \delta. \quad (21b)$$

Die Kurve, die sich aus (21b) ergibt, ist in Abb. 14a gestrichelt eingezeichnet. Wenn man sie mit den Kurven der Abb. 14b vergleicht, so sieht man sofort, daß sich die Kurvenformen gleichen. Auch die Lage der Extrema stimmt in etwa überein, während die Beträge der Extrema Unterschiede zeigen.

Der Grund für diese Unterschiede dürfte in der sehr starken Inhomogenität des Feldes der Ablenkspule zu suchen sein, die sich auch in den Momenten der Pol-

paare auswirken dürfte. Eine genaue Berechnung ist nicht möglich. Es wurde daher ein Einfluß der Inhomogenitäten angesetzt, der der Drehung der Ablenkspule proportional ist. Wenn man zu (21b) noch ein Glied $0,3 \cdot \sin \delta$ addiert, so erhält man die in Abb. 14b ausgezogene Kurve. Dieselbe liegt vollkommen in dem Streubereich, den die Kurven in Abb. 14b besitzen.

Es muß noch auf zwei Dinge hingewiesen werden: Im Experiment war der Kreisel *N* 218 im Meridianweiser eingebaut, während den Kurven in Abb. 14a die Konstanten des Kreisels 18 zugrunde gelegt werden mußten, weil der Kreisel *N* 218 der Untersuchung nicht zugänglich war. Ferner ist das Feld der Ablenkspule durch die Ferromagnetika des Meridianweisers sicher verzerrt worden, was in der Berechnung der Kurven nicht berücksichtigt werden konnte. Wenn trotz der hierin liegenden Fehlermöglichkeiten die theoretisch und experimentell ermittelten Kurven so gut übereinstimmen, dann zeigt sich darin einmal, daß die Fehlerquellen klein gewesen sein müssen; zum anderen aber wird hieran besonders deutlich, wie gut die Theorie die Verhältnisse der Praxis wiedergibt.

b) Der Einfluß des Erdfeldes.

Der Einfluß des Erdfeldes muß bei Kreiselkompassen nur dann berücksichtigt werden, wenn die absolute Richtung des Meridians angezeigt wird. Beim Meridianweiser geschieht dies nicht. Das Gerät muß zunächst auf einer Festlinie von bekannter Richtung geeicht werden (vgl. [8, 9]), und in dem Eichwert ist der Winkel α_0 enthalten. α_0 wird von demjenigen äußeren Magnetfeld bestimmt, das während der Eichung am Eichort herrschte. Als Weisungsfehler werden sich später die Drehmomente auswirken, die durch die Unterschiede des Magnetfeldes am Eich- und Meßort entstehen.

Wird bei einem Kreiselkompaß die Richtung des Meridians unmittelbar von der Kreiselachse abgenommen, wie es z. B. bei dem Vermessungskreisel von M. SCHULER geschah [6, 15], so macht sich in jedem Fall das während der Messung herrschende Magnetfeld in Gestalt von α_0 bemerkbar. SCHULER berichtete, daß bei seinen Versuchen, die sich über einen Zeitraum von 2 Jahren erstreckten, sämtliche Meßwerte auf einer Seite des Meridians lagen. Er vermutete einen systematischen Fehler, dessen Ursache er jedoch nicht angeben konnte.

Im Jahre 1922 betrug die Deklination in Kiel, wo SCHULER arbeitete, $8^\circ 54'$ West, H_0 etwa 175 mOe. Mit diesen Werten würde sich beim Meridianweiser für den Kreisel 18 $\alpha_0 = +1'41''$ ergeben. SCHULER stellte damals einen Fehlerwinkel von $-10,7''$ fest. Die Diskrepanz zwischen diesen Werten ist zwar groß, doch muß dabei berücksichtigt werden, daß Stärke und Richtung des äußeren Magnetfeldes in dem Laboratorium von SCHULER sich wesentlich von den Mittelwerten des für Kiel berechneten Erdfeldes unterscheiden haben können. Vor allem aber hatte der von SCHULER verwendete Kreisel eine ganz andere Form als die Kreisel, deren Verhältnisse die obigen Rechnung zugrunde gelegt wurden, so daß auch die magnetischen Konstanten sicher erheblich andere gewesen sind. Endlich war — nach einer mündlichen Mitteilung von M. SCHULER — der Kreisel bei den damaligen Versuchen von einer Abschirmhülle aus Eisenblech um-

geben, so daß sich das äußere Feld nur zu einem Teil ausgewirkt haben kann. Es sollten hier auch lediglich die Zahlwerte für beide Kreisel angeführt werden; es ist kaum daran zu zweifeln, daß die Unterschiede zwischen der Richtung des Meridians und den SCHULER'schen Kreismessungen durch den Winkel α_0 — als den Einfluß des äußeren Magnetfeldes — hervorgerufen worden sind.

F. Zusammenfassung.

In einer früheren Arbeit des Verfassers war festgestellt worden, daß bei Vermessungskreiseln Weisungsabweichungen auftreten, wenn sie in einem Magnetfeld rotieren. Die vorliegende Arbeit sollte versuchen, diese Vorgänge quantitativ zu klären.

Bei den Experimenten wurde das Entstehen von „induzierten“ und „Magnetisierungs-Polpaaren“ beobachtet. Es wird gezeigt, welche Polpaare von den einzelnen Komponenten des äußeren Magnetfeldes her vorgerufen werden und in welcher Weise sie sich vektoriell überlagern. Nach einer Erklärung des Relativverhältnisses, in dem die magnetischen Momente der einzelnen Polpaare zueinander stehen, werden die Vorgänge beim Einwirken eines beliebigen äußeren Feldes diskutiert.

Bei den Vorgängen im Kreisel ist mit dem Auftreten von Effekten zweiter Ordnung zu rechnen, u. a. mit der „drehenden Hysterese“. Auch diese Fragen werden diskutiert.

Aus dem Zusammenwirken des magnetischen Momentes \mathfrak{M} der Polpaare mit dem äußeren Magnetfeld \mathfrak{H} resultiert ein Drehmoment \mathfrak{N} , dessen z -Komponente Anlaß zu den Mißweisungen des Vermessungskreisels gibt. Zunächst werden die Momente N_x, N_y, N_z aufgestellt und in $N_\alpha, N_\beta, N_\gamma$ transformiert. Wenn man letztere in die FÖPPL'schen Kreiselgleichungen einführt, so gestatten die dadurch neu hinzukommenden Terme, den Einfluß des „äußeren Magnetfeldes“ rechnerisch zu berücksichtigen. An einer Gegenüberstellung der neuen und alten Kreiselgleichungen wird gezeigt, welche Terme der neuen Gleichungen vernachlässigt werden dürfen und welche bestehen bleiben müssen, um den Betrag des Fehlerwinkels α_0 richtig zu erhalten.

An Hand eines Experimentes wird geprüft, ob die hier entwickelte Theorie mit den Ergebnissen der Praxis übereinstimmt. Die Gegenüberstellung der theoretischen und der experimentell ermittelten Kurven dürfte die Richtigkeit der Theorie beweisen.

Da auch frühere Ergebnisse von SCHULER durch das Einwirken äußerer Magnetfelder erklärt werden können, läßt sich zusammenfassend sagen:

Das Einwirken äußerer Magnetfelder führt zu Mißweisungen des Vermessungskreisels. Der Mechanismus dieser Vorgänge konnte in der vorliegenden Arbeit geklärt werden. Die auf Grund der experimentellen Ergebnisse entwickelte Theorie führt zu einer Erweiterung der Kreiselgleichungen, die sogar eine Berechnung der bei gegebenem Magnetfeld zu erwartenden Mißweisung möglich macht.

Die vorliegenden Untersuchungen wurden im Institut für Markscheidewesen der Bergakademie Clausthal sowie im Erdmagnetischen Observatorium Wingst, des Deutschen Hydrographischen Instituts Hamburg durchgeführt. Herrn Prof. Dr. O. RELLENSMANN, Clausthal, sowie Herrn Präsident Dr. BÖHNECKE,

Hamburg, möchte ich für die freundliche Bereitstellung der Einrichtung ihrer Institute vielmals danken. Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. RELLENSMANN, der die Durchführung der Arbeit anregte und stets tatkräftig unterstützte. Die *Deutsche Forschungsgemeinschaft*, Bad Godesberg, hat durch die Gewährung von Forschungsmitteln die Arbeit überhaupt erst ermöglicht, und Herr Dr. F. FÖRSTER, Reutlingen, ihre Durchführung wesentlich beschleunigt, indem er ein Perstedmeter kostenlos auslieh. Den Herren Prof. Dr. H. MAYER, Clausthal, Prof. Dr. M. SCHULER, Göttingen, und Prof. Dr. ERRULAT, Hamburg, bin ich für ihre freundliche Förderung der Arbeit sehr verbunden und verdanke den Herren Dr. MENZEL, Hamburg, und Dipl.-Phys. H. THOMAS, Clausthal, viele anregende Diskussionen.

Literatur. [1] BEHRNDT, K.: Z. angew. Phys. 5, 270 (1953). — [2] RELLENSMANN, O.: Z. Glückauf 86, 465 (1950). — [3] RELLENSMANN, O.: MadM. 57, 57 (1950). — [4] GECKELER, J. W.: Ing.-Arch., IV, 66 u. 127 (1933). — [5] SCHULER, M.: Phys. Z. 24, 344 (1923). — [6] SCHULER, M.: MadM. 71 (1922). — [7] JUNGWIRTH, G.: MadM. 57, 87 (1950). — [8] RELLENSMANN, O.: Z. Vermwes. 247 (1950). — [9] STIER, K. H.: MadM. 60, 1 (1953). — [10] BEHRNDT, K.: MadM. 59, 26 (1952). — [11] JAKOSKY, J. J.: Exploration Geophysics, Trija Publishing Comp., Los Angeles (1950). — [12] KÜPFMÜLLER, K.: Einf. in die theoret. Elektrotechn., Springer-Verlag, Berlin (1932). — [13] v. HARLEM, J.: Ann. d. Phys. 14, 667 (1932). — [14] SCHULER, M.: Müller-Pouillet's Lehrb. d. Phys. I, 1; 11. Aufl., S. 731—848, Braunschweig (1929). — [15] SCHULER, M.: Z. Geophys. 1, 59 (1924/25), (MadM. = Mitteilungen aus dem Markscheidewesen.)

Dipl.-Phys. KLAUS BEHRNDT,
Institut für Markscheidewesen der Bergakademie
Clausthal.

Berichte.

Hochkonstante Gleich- und Wechselspannungsquellen mittlerer Spannungen für Prüfzwecke*.

Von HARALD HELKE und RUDOLF STENZEL.

Mit 14 Textabbildungen.

(Eingegangen am 4. März 1954.)

In der elektrischen Meß- und Regeltechnik benötigt man für viele Zwecke, beispielsweise bei der Prüfung von Gleich- bzw. Wechselstrom-Präzisions-Instrumenten, Spannungsquellen verhältnismäßig kleiner Leistung aber hoher Konstanz, um die Fehler der Meßgeräte einwandfrei bestimmen zu können. Akkumulatorenbatterien als Gleichspannungsquelle, deren EMK bei guter Pflege auf etwa 0,01% konstant ist, sind zwar durchaus brauchbar, aber besonders für höhere Gleichspannungen wirkt sich das unhandliche hohe Gewicht und die Notwendigkeit dauernder Wartung und Pflege nachteilig aus. Außerdem sind die Kosten einer derartigen Anlage einschließlich Wartung und Materialaufwand beträchtlich. Als konstante Wechselspannungsquellen stehen zwar geregelte Wechsel- bzw. Drehstromgeneratoren mit einer Regelprecisionigkeit von 0,1% zur Verfügung, deren Anschaffungskosten und Werkstoffaufwand ebenfalls groß sind, jedoch ist die Erstellung gleichwertiger Wechselspannungs-Netzgeräte ebenso wünschenswert wie die von Gleichspannungs-Netzgeräten als Batterie-Ersatz.

Im folgenden wird dem experimentierenden Physiker ein Überblick über die zur Zeit üblichen und möglichen Verfahren und Geräte für die Konstanzhaltung bzw. Regelung von Gleich- und Wechselspannungen gegeben.

1. Elektronische Regelungs-Verfahren für Netzgeräte.

Bereits im Jahre 1938 wurde von STEINLEIN ein vollnetzbetriebenes sog. „Hochkonstant-Netzgerät“ mit elektronischer Stabilisierung auf den Markt gebracht. Das Regelverfahren bei diesem Gerät beruht auf der Änderungsmöglichkeit des inneren Widerstandes einer im Stromkreis liegenden Elektronen-

röhre, die von einer anderen Röhre über das Gitter selbsttätig derart angesteuert wird, daß die Ausgangsspannung des Gerätes bei schwankender Netzspan-

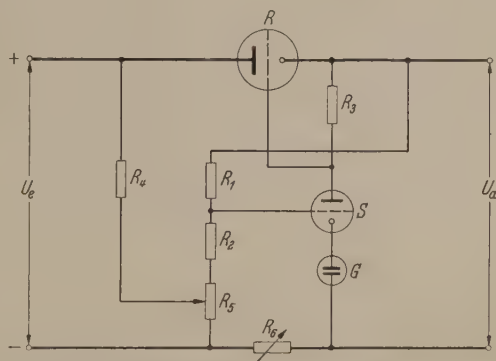


Abb. 1. Prinzip der elektronischen Regelung (STEINLEIN).

nung und bei veränderlicher Gleichstromentnahme konstant bleibt. Die Regelung der abgegebenen Gleichspannung erfolgt nach dem Prinzip der Kathodenverstärkerschaltung, wobei die Glimmspannung einer Glimmröhre als Bezugsnormale dient [1].

Abb. 1 zeigt eine Prinzipschaltung dieses Verfahrens. Hierin ist R die als regelbarer Widerstand wirkende Elektronenröhre, die über die Steuerröhre S gesteuert wird, wobei der Spannungsabfall am Anodenwiderstand (R_3) dieser Röhre als Gitterspannung für die Regelröhre dient. Ein Teil der Ausgangsspannung U_a wird über das Potentiometer R_1/R_2 gegen die Normalspannung der Glimmröhre G geschaltet. Beginnt U_a infolge Zunahme der vom Netzteil gelieferten Eingangsspannung U_e oder bei sinkender Belastung anzusteigen, so wird das Gitter der Röhre S etwas positiver, der Anodenstrom nimmt zu, und somit erhält die Regelröhre eine etwas höhere negative Gitterspannung. Dadurch erhöht sich der innere Widerstand und demnach auch der Spannungsabfall an R , und zwar soweit

* Auszugsweise Wiedergabe eines am 26. November 1953 gehaltenen Vortrages im Rahmen der Berliner Schau „Messen und Prüfen“ des Rationalisierungs-Kuratoriums der Deutschen Wirtschaft (RKW).

daß U_a annähernd gleichbleibt. Bei sinkender Eingangsspannung oder zunehmender Last ergibt sich ein entsprechender Vorgang. Diese von Schwankungen der Ausgangsspannung gesteuerte Regelung gewährt allerdings noch keine völlige Konstanz. Damit die Steuerröhre die ihr zugeordnete Funktion ausüben kann, muß nämlich die kontrollierte Teilspannung und damit auch U_a stets etwas größer oder kleiner sein als die Vergleichsspannung an der Glimmröhre, d. h. die Regelung ist an eine bleibende Abweichung gebunden.

Eine Verbesserung wird dadurch erreicht, daß über eine weitere Potentiometerschaltung R_4/R_5 auf den Gitterkreis der Steuerröhre ein kleiner Teil der Eingangsspannung U_e gegeben wird. Durch Einstellen des Widerstandes R_5 kann man die Netzspannungsschwankungen voll auskompensieren, jedoch nicht die

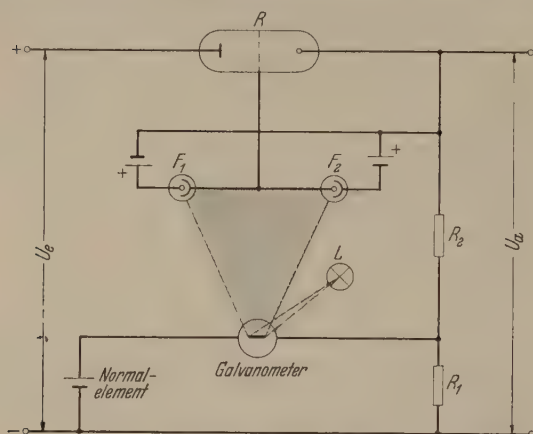


Abb. 2. Prinzip des lichtelektrischen Konstanthalters (MERZ).

durch Belastungsänderungen hervorgerufenen Schwankungen der Ausgangsspannung. Diese werden durch einen im Hauptkreis, und zwar gitterseitig vom Steuerrohr liegenden regelbaren Widerstand R_6 über die Röhrenschaltung ausgeregelt. Mit Hilfe nicht dargestellter Kondensatoren kann die Welligkeit der abgegebenen Gleichspannung auf einen sehr kleinen Wert heruntergeregelt werden.

Die jetzt von STEINLEIN gebauten Geräte regeln die abgegebene Gleichspannung von etwa 300 V bei Netzspannungsänderungen von $\pm 10\%$ selbsttätig auf weniger als $\pm 0,01\%$. Die Welligkeit der geregelten Gleichspannung ist kleiner als $0,01\%$. Die maximale Stromentnahme beträgt 100 bzw. bei einer anderen Type 300 mA.

Ein Gerät der Schweizer Firma *Metrohm* arbeitet mit einer von den Schwankungen der Ausgangsspannung beeinflussten Regelung und einer großen Verstärkung, so daß die Spannungsänderung bei Netzspannungsschwankungen von $\pm 10\%$ im Mittel nur etwa $0,005\%$ beträgt. Das Gerät liefert eine Gleichspannung von etwa 330 V und ist bis zu 300 mA belastbar.

Ferner ist noch eine elektronische Regeleinrichtung für Gleichspannung von W. HARTEL zu erwähnen. [2]. Diese besteht aus einem Meßwertumformer, der Vergleichsspannungsquelle und einem Gleichspannungsverstärker, die zwischen der Meßstelle, der Regelgröße und dem Stellglied angeordnet sind. Die Regelgröße wird gemessen, vom Meßwertumformer in eine Gleichspannung umgewandelt und mit einer konstanten Spannung verglichen. Im Falle einer Störung ist diese Differenz ein Maß für die Abweichung der

Regelgröße von ihrem Sollwert. Sie wird dem Verstärker zugeführt und beeinflusst über das Stellglied die Regelgröße so, daß sich diese wieder dem vorgeschriebenen Sollwert bis auf die bleibende Regelabweichung nähert. HARTEL gibt für sein Netzanschlußgerät eine außerordentlich konstante Ausgangsgleichspannung von 455,51 V an, und zwar zwischen 180 V und 240 V Netzspannung bei einer Welligkeit der Ausgangsspannung von $0,04\%$. Die Überschwinge bei Netzspannungsstößen von $180 \dots 220 \dots 180$ V soll höchstens $0,15\%$ des Gleichspannungsmittelwertes, die Zeitdauer der vorübergehenden Abweichung weniger als 1 ms betragen.

Die in diesem Gerät verwendete Vergleichsspannungsquelle besitzt als erste Stufe einen magnetischen Spannungskonstanthalter (gesättigter Transformator mit Luftspaltdrossel), dessen gleichgerichtete und geglättete Ausgangsspannung der nächsten, aus zwei Spezialglimmröhren bestehenden Stabilisierungsstufe zugeführt wird. Die Ausgangsspannung dieser Stufe speist die dritte Stabilisierungsstufe. Eine Schwankung der Eingangsspannung von z. B. $+9\%$ auf -18% des Nennwertes wird in den drei Stufen so stark reduziert, daß auf einem Gleichstromkompensator (fünf Dekaden) fast keine Änderung der Ausgangsspannung festgestellt werden kann. Das Gerät liefert eine Gleichspannung von etwa 85 V bei einer maximalen Stromentnahme von etwa 0,85 mA [2].

Die Firma *Rohde & Schwarz* hat ein Netzgerät für konstante Gleichspannung entwickelt, das seine Ausgangsspannung von 200 ... 1000 V auf $\pm 0,1\%$ zwischen Leerlauf und Vollast (max. 300 mA) bei Netzspannungsschwankungen von 180 ... 230 V konstant hält. [Vergleiche Druckschrift BN 95 141]. Von einem Zweiweggleichrichter wird über eine Siebkette die Gleichspannung geliefert, die über eine Leistungsröhre an die Ausgangsklemmen gelangt. Die Regelung der Ausgangsspannung erfolgt durch eine sinnngemäße Steuerung dieser Leistungsröhre über eine Steuerröhre.

Durch eine Regeleinrichtung, die LE BLAN in einer französischen Zeitschrift vom Jahre 1947 erwähnt [3] wird der zu regelnden Spannungsquelle eine Zusatzspannung zugeschaltet. Als Regelorgan dient eine Brücke, aus zwei Widerstandspaaren mit verschiedenen großen Temperaturkoeffizienten; sie ist für den Sollwert der zu regelnden Verbraucherspannung abgeglichen. Ihre Diagonalspannung bestimmt, nach entsprechender Verstärkung, die Größe der Zusatzspannung. Zur Regelung ist also immer eine gewisse Abweichung der zu regelnden Ausgangsspannung von ihrem Sollwert erforderlich. Spannungsschwankungen der Spannungsquelle sollen nach diesem Vorschlag etwa auf ihren tausendsten Teil herabgesetzt werden können, d. h. Schwankungen der Eingangsspannung von 10% werden durch die Zusatzspannung soweit verkleinert, daß die Ausgangsspannung auf etwa $0,01\%$ konstant ist. Über die Frage, welche absolute Genauigkeit durch Anwendung der beschriebenen Regeleinrichtung erreicht werden kann, gibt die Veröffentlichung von LE BLAN keine Auskunft.

2. Lichtelektrische Regelungsverfahren.

Die Grundschaltung eines lichtelektrischen Konstanthalters nach MERZ [4] zeigt Abb. 2.

Dieses Verfahren beruht auf der Änderung des inneren Widerstandes einer Fotozelle in Abhängigkeit

der Belichtung. Der Spiegel eines Galvanometers leuchtet in der Nullage beide Zellen F_1 und F_2 gleichmäßig. Steigt die Eingangsspannung, dann vergrößert sich auch der Spannungsabfall an R_1 ; das Galvanometer wird ausgelenkt und leuchtet die Fotozellen ungleichmäßig aus. Die beiden Fotozellen wirken sozusagen wie ein Spannungsteiler, der an das Ende der Röhre R angeschlossen ist. Die Gitterspannung ändert sich also mit der Lichtverteilung und ändert den inneren Widerstand von R . Dadurch wird die Ausgangsspannung konstant gehalten. Geschwindigkeit und Genauigkeit der Regelung hängen in der Linie von den Eigenschaften des Regelgalvanometers ab. Da die Regelung so lange erfolgt, bis der Spannungsabfall an R_1 gleich der Spannung des Normal-elementes geworden ist, haben Änderungen innerhalb des Regelsystems keinen Einfluß auf die Konstanz der Ausgangsspannung. F. LAUDE gibt für ein von ihm entwickeltes Gerät [4] eine Genauigkeit von $\pm 0,1\% \dots 10^{-3}\%$ an, und zwar auch über längere Zeiträume trotz extremster Spannungsänderungen.

In ähnlicher Weise und bei sinngemäßer Anwendung der gezeigten Grundsätze kann auch eine Wechselspannung konstant gehalten werden. Die Spannungs Konstanz soll hierbei ebenfalls $10^{-2}\%$ betragen. Der Einfluß von Frequenzschwankungen ist in der Veröffentlichung nichts gesagt.

Eine Konstantspannungsquelle für Gleich- oder Wechselspannung mit einer Genauigkeit von etwa $\pm 0,1\%$ hat E. HELMES angegeben [5]. Bei dem Gerät ist ein Teil der Ausgangsspannung mittels eines Regelgalvanometers mit der Spannung eines Normal-elementes verglichen. Sobald die Ausgangsspannung ihrem Sollwert abweicht, dreht sich der Spiegel des Galvanometers, ändert die Beleuchtung einer Photozelle und damit auch den Strom, der die Steuerwicklung einer Regeldrossel durchfließt und ihre Impedanz beeinflusst. Dadurch wird der Spannungsabfall an einem Anpassungstransformator und damit auch die Ausgangsspannung des Gerätes gesteuert.

3. Glimmstreckenstabilisierung für Netzgeräte.

Die in den ersten Nachkriegsjahren zur Verfügung stehenden Netzanschlußgeräte genügten noch nicht den Anforderungen, die bei Kompensatormessungen die Unveränderlichkeit der Spannung während der Messung gestellt werden müssen.

Es wurden daher eigene Versuche zur Entwicklung eines Netzanschlußgerätes durchgeführt, bei dem die Stabilisierung der Gleichspannung durch Glimmröhren erreicht werden sollte, deren Spannung bekanntlich nur in geringem Maße vom durchfließenden Strom abhängig ist. Durch eine Kaskade in Reihe geschalteter Eisenwasserstoffwiderstände und Glimmröhren kann man die Ausgangsspannung soweit stabilisieren, daß diese bei unveränderter Belastung praktisch konstant bleibt. Wir haben also hier nicht, wie bei den elektronisch geregelten Netzgeräten, ein Steuer- und Regelsystem in einer geschlossenen Regelstrecke, sondern nur eine reine Stabilisierung der Netzspannung.

Eine Prinzipschaltung dieses Verfahrens zeigt Abb. 3. Das Gerät liefert bei Netzspannungsschwankungen von $\pm 10\%$ und unveränderter Belastung eine $\pm 0,01\%$ konstante Gleichspannung von etwa 420 V bei einer maximal entnehmbaren Stromstärke von 180 mA.

Der Vorteil der vorliegenden Anordnung liegt vor allem in der Einfachheit des Aufbaues. Als Nachteil ist zu bemerken, daß bei Lastschwankungen die Spannungsstabilisierung nicht so gut wirkt wie bei den eingangs genannten Anordnungen. Da nun aber das Gerät eine Batterie ersetzen soll, muß notwendigerweise gefordert werden, daß außer der Spannungs Konstanz bei veränderlicher Netzspannung auch ein durch Belastungsänderung des Gerätes bedingter Ausgleichsvorgang der stabilisierten Spannung schnell genug abgeklungen sein muß. In Abb. 4 sind die Spannungsänderungen der Glimmstreckenstabilisierung für Gleichspannung.

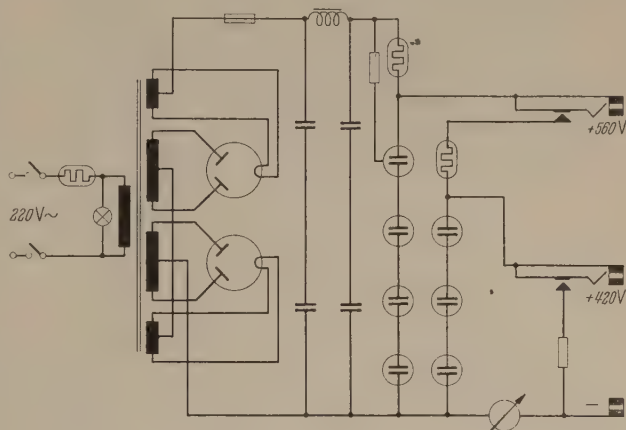


Abb. 3. Prinzip der Glimmstreckenstabilisierung für Gleichspannung.

änderungen der Glimmstrecken bei Belastungsschwankungen an einem nach diesem Prinzip gebauten Gerät für höhere Belastbarkeit aufgetragen. Nach einer Anwärmzeit von etwa 30 Minuten wurden die Messungen so vorgenommen, daß nach der Belastungsänderung 2 Minuten gewartet wurde, bis die Ablesung der

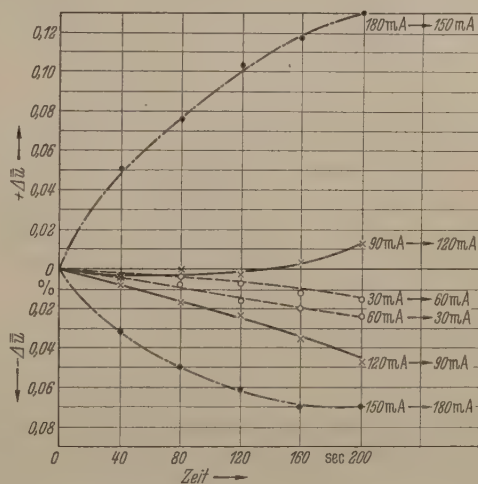


Abb. 4. Spannungsänderung der Glimmstrecken bei Belastungsschwankungen.

Spannungsänderungen als Funktion der Zeit erfolgte. Aus den Kurven ist zu entnehmen, daß dieser Netzgleichrichter als Spannungsbatterie für Gleichstromkompensatoren nur bedingt verwendet werden kann.

Für die Stabilisierung einer Wechselspannung kann man, unter Fortlassung des Gleichrichters, dasselbe Prinzip wie bei der Stabilisierung einer Gleichspannung verwenden. Allerdings ist dabei zu bedenken, daß die Glimmröhre bei Anschluß an Wechselspannung nicht dauernd brennt, sondern eine trapezförmige Wechselspannung entsteht und bei sich ändernder Speisespannung

nung nur der Scheitelwert, aber nicht der Effektivwert konstant gehalten wird [7].

Eine derartige Prinzipschaltung zeigt Abb. 5. Das Gerät liefert eine bis 600 V kontinuierlich einstellbare Wechselspannung und Ströme bis 6 A bei einer Leistung von etwa 25 VA. Die Ausgangswechselspannung ändert sich um nicht mehr als $\pm 0,1\%$, wenn die Netzspannung bis zu $\pm 10\%$ und die Netzfrequenz bis zu $\pm 0,5\%$ vom Sollwert abweichen.

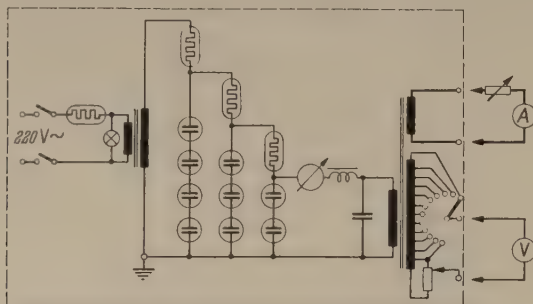


Abb. 5. Prinzip der Glimmstreckenstabilisierung für Wechselspannung.

Einem kombinierten Netzanschlußgerät kann man mit Hilfe eines Umschalters ausgangsseitig entweder konstante Gleichspannung oder konstante Wechselspannung bzw. konstanten Wechselstrom entnehmen [8].

4. Glimmstreckenstabilisierung mit elektronischen Regelgliedern.

Eine wesentliche Verbesserung der Spannungs Konstanz auf genauer als $\pm 0,005\%$ bei beliebig einstellbarer Gleichstromentnahme bis 100 mA kann mit

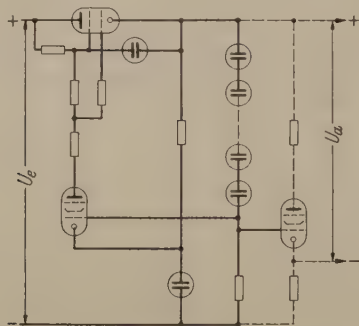


Abb. 6. Glimmstreckenstabilisierung mit elektronischer Regelung.

einem „Stabilisierten Netzgleichrichter“ der AEG erzielt werden [9]. Die Konstanzhaltung der Gleichspannung von etwa 400 V wird durch eine zweistufige Kaskadenschaltung von Stabilisatoren und Eisenwasserstoffwiderständen erreicht, deren an sich bereits vorhandene Spannungs Konstanz durch zusätzliche elektronische Mittel wesentlich erhöht wird. Bei dem neuentwickelten Verfahren steuert der Querstrom der Stabilisatoren eine Röhrenautomatik so, daß er selbst dabei innerhalb seiner günstigsten Bereichsgrenzen bleibt. Damit wird auf einfache Weise eine gleichmäßige Spannungs Konstanz über den ganzen Belastungsstrombereich erzielt. Zur Vorstabilisierung wird als magnetischer Spannungs Konstanzhalter ein Zusatztransformator mit Luftspalt verwendet. Schon damit kann man Eingangsschwankungen von $\pm 10\%$ auf etwa $0,5\%$ verkleinern.

Um den Querstrom der Stabilisatoren in der ersten Kaskade bei Lastschwankungen innerhalb des günstigen Bereiches zu halten, wird parallel zum Ausgang des Gerätes eine Pentode gelegt, deren Steuergitter durch eine Steuertriode in Abhängigkeit vom Belastungsstrom geregelt wird. Nimmt die Last so vergrößert sich der Pentodenstrom, und dadurch wird der Querstrom der Stabilisatoren nahezu konstant gehalten.

Ein ähnliches Verfahren (Abb. 6) haben HIBB und CARO veröffentlicht [10].

5. Verfahren mit magnetischen Konstanthaltern bei Regelgliedern.

Als Vorsatzgeräte z. B. vor hochkonstanten Netzelementen oder zur Stabilisierung der Heizspannung in einem Netzgerät verwendeten Röhren werden im steigendem Maße magnetische Konstanthalter gebaut. Sie bestehen im einfachsten Fall aus einem im Sättigungsgebiet arbeitenden Transformator, der eine Eisendrossel mit Luftspalt vorgeschaltet ist (Spannungskonstanz 1 bis 2%). Eine Besserung der Konstanz um eine Zehnerpotenz bringt die Verwendung eines Zusatztransformators mit Luftspalt an Stelle der Eisendrossel, dessen Sekundärwicklung gegenphasig in den Sekundärkreis des Sättigungstransformators gelegt werden [11].

Ein Netzgerät mit kombinierter magnetisch-elektronischer Regelung der Firma Rohde & Schwarz liefert konstante Wechselspannung regelt bei Spannungssprüngen von 190 ... 230 V oder Belastungsänderungen von Leerlauf bis zur Nennleistung, die zwischen 500 VA und 2 kVA betragen kann in 0,2 Sekunden auf eine Genauigkeit von $\pm 0,2\%$ aus. Änderungen der Netzfrequenz von 40 ... 60 Hz bleiben ohne Einfluß auf die Regelgenauigkeit [vgl. Druckschrift BN 95 131/132/133]. Ein Sparrtransformator wird über eine gleichstromvormagnetisierte Eisendrossel gespeist, deren Gleichstrom über eine Leistungsdiode und eine Steuer-Diode von den Änderungen der Ausgangsspannung so gesteuert wird, daß die Spannung innerhalb der angegebenen Genauigkeit konstant bleibt. Ein Siebkreis hat die Aufgabe, die Ausgangsspannung praktisch sinusförmig zu halten.

Einen Wechselspannungs-Stabilisator nach dem gleichen Regelprinzip für eine Nennleistung von 2 kVA hat die Firma Elektro-Spezial [vgl. ETZ-B 5, S. 32 (1953)] auf den Markt gebracht. Seine Regelgenauigkeit liegt bei Änderungen der Speisespannung zwischen $\pm 10\%$, der Frequenz zwischen $\pm 4\%$, der Belastung zwischen 10 und 100% und des Leistungsfaktors zwischen $\cos \varphi = 1$ und 0,75 unter $\pm 0,5\%$; bei Änderung nur einer dieser Größen wird die Ausgangsspannung mit Sicherheit auf $\pm 0,2\%$ gleichgehalten.

Ein Regler für die gebräuchlichen Einphasen- und Dreiphasen-Netzspannungen ist von der Sorensen u. Co., Inc., Stamford entwickelt worden und wird von der Schweizer Firma Ardag vertrieben [12].

Seine Prinzipschaltung ist in Abb. 7 wiedergegeben. Als Regelfühler dient der Heizfaden einer Diode, die an einem primärseitig an die Klemmen der konstant gehaltenen Wechselspannung angeschlossenen Transformator liegt. Der Aufbau dieser Spezialdiode, zusammen mit der dazugehörigen Schaltung ermöglicht es, das Prinzip der unmittelbaren Messung und Regelung mittels thermischer Stromwirkung zu verwenden.

e Diode bildet den veränderlichen Zweig einer Wheatstone-Brücke, deren übrige Zweige aus festen Widerständen bestehen. Die Diagonalspannung dieser Brücke bewirkt in der gleichen Weise — wie bei den oben vorher beschriebenen Geräten — die Spannungsreglung.

Der Regler hält eine Netzspannung, die zwischen 0 und 250 V schwankt auf $220\text{ V} \pm 0,2\%$ konstant. Bei Nennlasten von 150 VA bis 9 kVA. Bei einer Nennleistung von 45 kVA soll die Genauigkeit $\pm 0,5\%$ betragen. Der Oberwellenanteil der Ausgangswechselspannung kann auf weniger als 2% gehalten werden. Durch das Weglassen von Resonanzelementen im Regelkreis ist der Regler praktisch frequenzunabhängig.

Die Anwendung des Prinzips gleichstromvormagnetisierter Drosseln mit Nickel-Eisenblechen [13, 17] als statischen Regelglieder, wie sie z. B. im folgenden Abb.

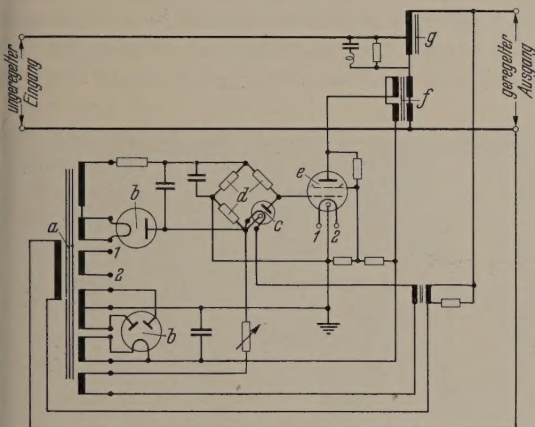


Abb. 7. Prinzip des SORENSEN-Wechselspannungsreglers. *a* Netztransformator; *b* Gleichrichter; *c* Regeldiode; *d* feste Brückenwiderstände; *e* Leistungströhre; *f* Steuerdrossel mit Gleichstrom-Vormagnetisierung; *g* Spartransformator.

mittels bei der Besprechung des magnetischen Verarbeiters für die Regelung der Spannung von Wechselstrom-Drehstromgeneratoren angedeutet werden, dürfte auch magnetische Netz-Konstanthalter für Meßzwecke in Zukunft anwendbar machen [14], zumal magnetische Verstärker schon seit langer Zeit als Regelverstärker zur Drehzahlregelung industriell angewendet werden.

Spezial-Maschinensätze mit geregelter Spannung.

Werden für Präzisionsmeßzwecke größere Leistungen bei konstanter Spannung benötigt, so werden vielfach Maschinenaggregate verwendet, die wie Abb. 8 aufgebaut sein können. Hier dient ein Drehstromsynchronmotor, der vom unregulierten Netz gespeist wird, als Antrieb für den Drehstromgenerator. Letzterer wird auch oft durch einen Transformatorsatz mit Gleichgleichrichtern ersetzt, der dann aus dem geregelten Netz gespeist wird.

Die Konstanzhaltung der Drehstrom-Generatorspannung geschieht nach folgendem Prinzip: Die Spannungsschwankungen des konstant zu haltenden Netzes werden über ein Meßglied z. B. Meßgleichrichter gleichgerichtet. Diese Gleichspannung wird über eine entgegengeschaltete konstante Spannungsquelle (Batterie, Netzgleichrichter verschiedener Art) dem Eingang eines Verstärkers zugeführt, so daß also die Differenz zwischen den Netzspannungsschwankungen

und der konstanten Gegenspannung der Vergleichsspannung nunmehr den Verstärker steuert. Die Ausgangsspannung des Kraftverstärkerteiles wird nun über einen Widerstand so in den Erregerkreis des Drehstromgenerators eingeführt, daß positive Spannungsänderungen das Feld des Generators schwächen, seine Spannung also wieder vermindern und umgekehrt. Da die Fühlspannung für das Meßglied nur von einem

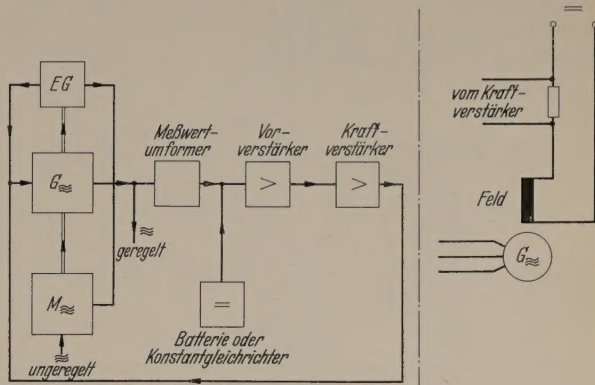


Abb. 8. Spannungsgeregelter Drehstrom-Maschinensatz.

Strang, z. B. *R—S* abgenommen werden kann, wird auch nur dieser konstant gehalten, d. h. es können zwischen *S—T* und *R—T* noch Schwankungen auftreten. Die erreichte Spannungs Konstanz des geregelten Stranges liegt bei $\pm 0,1\%$, wenn sich die Netzspannung um $\pm 10\%$ oder die Netzfrequenz um $\pm 1\%$ ändern. Die Geschwindigkeit mit der diese Einstellung der konstanten Spannungen erfolgt, liegt bei 0,2 sec.

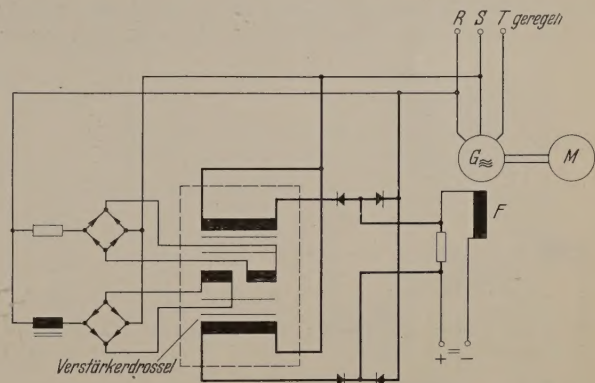


Abb. 9. Prinzip einer Spannungs Konstanzhaltung mit magnetischem Regler.

Die hauptsächlichsten Verstärker, die z. Z. für Spannungs Konstanzhalter gebaut werden, sind: Röhrenverstärker, Stromtorverstärker, magnetische Verstärker und hydraulisch-elektrische Verstärker. Beim Röhrenverstärker wird die Fühlspannung, d. i. die Spannung *RS* des geregelten Netzes, zunächst im Meßglied durch einen Röhrengleichrichter gleichgerichtet und dann gesiebt. Die Differenz dieser Gleichspannung und der konstanten Gegenspannung gelangt zum Gitter des Vorverstärkers, um schließlich vom Kraftverstärker aus einen Widerstand im Erregerkreis des Drehstromgenerators zu beeinflussen [15]. Mit Verstärker-Schaltungen dieser Art wurden die oben genannten Genauigkeiten der Spannungs Konstanz erreicht.

Stromtorverstärker, deren Wirkungsweise als bekannt vorausgesetzt sei, kommen in der Hauptsache

wohl für die Regelung oder auch Steuerung großer Leistungen in Frage [16], so daß sie im Rahmen dieser Abhandlung außer Betracht bleiben können.

Als dritte Verstärkereinrichtung zeigt Abb. 9 das Prinzip eines *magnetischen Verstärkers*. Er hat gegenüber dem Röhrenverstärker den Vorzug, daß er kontakt- und daher wartungslos, sowie lage- und erschütterungsunempfindlich arbeitet. Er ist daher z. B. in

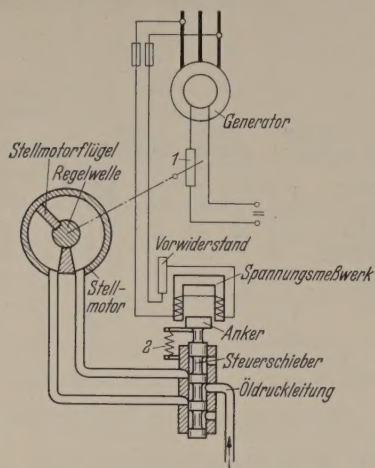


Abb. 10. Prinzip einer hydraulisch-elektrischen Spannungskonstanthaltung.

unbemannten, fernbedienten Stationen mit Vorteil anwendbar. Nachteilig sind gegenüber dem Röhrenverstärker seine geringere Verstärkungsmöglichkeit bei erträglichem Aufwand sowie seine zeitlichen Verzögerungen. Die Wirkungsweise des hier gezeigten Beispiels ist folgende: Die Fühlspannung von *RS* her, wird in einer Brückenschaltung, bestehend aus Gleichrichtern, ohmschen Widerstand und stark gesättigter

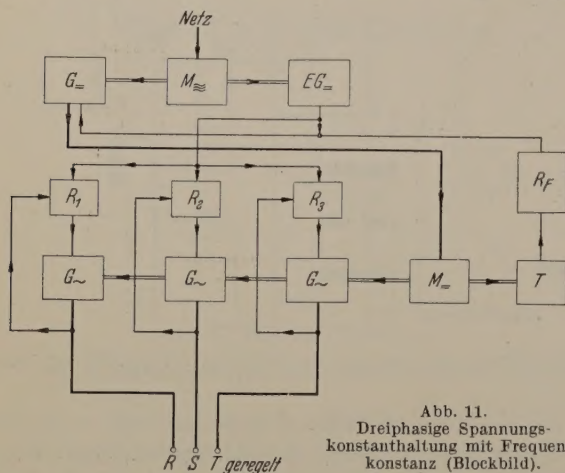


Abb. 11. Dreiphasige Spannungs-konstanthaltung mit Frequenzkonstanz (Blockbild).

Drossel gleichgerichtet und fließt durch die Gleichstrom-Wicklungen einer Drossel aus hochlegierten Blechen (Mu-Metall, Permalloy o. ä.). Der Arbeitswechselstrom der Drossel, der ebenfalls den Leitern *R—S* entnommen wird, wird gleichgerichtet und beeinflusst nun wieder, wie vorher beim Röhrenverstärker beschrieben, den Erregerkreis des Drehstromgenerators solange, bis dessen Soll-Spannungswert erreicht ist [18]¹.

¹ In der ETZ—B, 6, Heft 3 vom 21. 3. 54 wird ein magnetischer Spannungs-Schnellregler der Fa. Ing. Max Fuss G. m. b. H., Berlin-Hermsdorf erwähnt, der nach einem ähnlichen Prinzip arbeitet und für mittlere und große Generatoren bestimmt ist.

Bei der *hydraulisch-elektrischen Spannungskonstanthaltung* (Abb. 10) erfolgt die Beeinflussung des Erregerkreises des Drehstromgenerators nicht elektrisch, sondern durch mechanische Verstellung des Feldwiderstandes 1. Der Meßwertumformer besteht hier aus einem hufeisenförmigen Eisenkern, der einen durch eine Feder 2 belasteten Anker je nach der Größe der Fühlspannung mehr oder weniger stark anzieht. Der Anker verstellt den Steuerschieber, der die Druckflüssigkeit durch eine der beiden Druckleitungen zum Stellmotor freigibt. Dieser verändert über eine mechanische Verbindung den Feldwiderstand solange, bis die Generator-Sollspannung erreicht ist. Dann ist wieder die Normalstellung des Ankers und auch des Steuerschiebers erreicht, so daß dem Stellmotor kein weiteres Drucköl mehr zugeführt werden kann [vgl. Druckschrift R 40 1951 von NEUFELD und KUHNKE].

Die erreichbare Genauigkeit an einer Anlage, bei der an Stelle des Feldwiderstandes je 3 Zusatzreglertransformatoren gesteuert wurden, betrug 0,1% bei Spannungsänderungen von $\pm 5\%$ und Frequenz

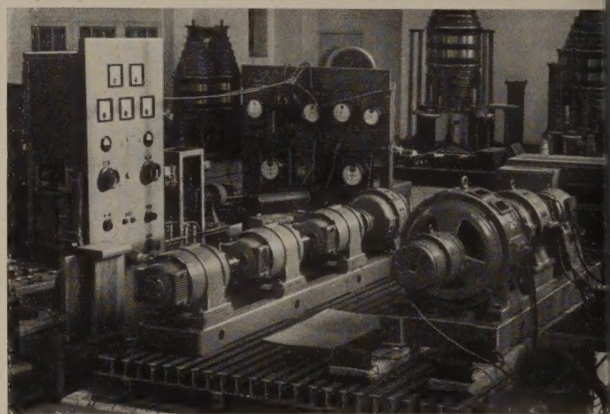


Abb. 12. Maschinensätze mit Spannungs- und Frequenzkonstanz.

änderungen von $\pm 1\%$. Die Regelungsgeschwindigkeit betrug 0,3 ... 0,4 sec.

Die Leistungen, der nach den geschilderten Verfahren konstant gehaltenen Drehstromgeneratoren für Meßzwecke liegen z. Z. zwischen 2 und 15 kVA.

Die Abb. 11 und 12 zeigen eine Anlage, die die Spannung von allen 3 Phasen konstant hält und außerdem noch die Frequenz zwischen 40 und 60 Hz auf den jeweils eingestellten Sollwert selbsttätig einregelt. Hierbei ist der Drehstromgenerator in 3 Einphasen-Wechselstromgeneratoren aufgeteilt, deren Ausgangsspannungen zu einem normalen Drehstromnetz zusammengeschaltet sind. Angetrieben werden die drei Generatoren durch einen Gleichstrommotor, der seine Spannung von dem Generator eines zweiten Maschinensatzes erhält (LEONARD-Schaltung).

Bei der Anlage müssen der Energiefluß und der Kreis der Regelvorgänge gesondert betrachtet werden. Der erstere geht vom unregulierten Netz zum Synchronmotor des oberen Maschinensatzes (Abb. 11), von diesem zum Gleichstromgenerator, dann zum Gleichstrommotor des unteren Maschinensatzes und zuletzt zu den drei Einphasen-Generatoren.

Die Regelvorgänge verlaufen folgendermaßen: Spannungsänderungen in jedem Wechselstrom-Generator werden über den zugehörigen Regler *R*₁, *R*₂, *R*₃

sgeregelt. Frequenzabweichungen bewirken infolge der Drehzahländerung des unteren Maschinensatzes Änderungen der Spannung des Tachometergenerators durch die über den Regler R_F nun die Generatoranordnung des Gleichstromgenerators entsprechend erhöht oder erniedrigt wird, bis die Soll-Frequenz wieder erreicht ist.

Abb. 12 zeigt den Aufbau einer derartigen Anlage für den Prüfstand der Physikalisch-Technischen Versuchsanstalt, Institut Berlin. Die gemessenen Genauigkeiten liegen in den gleichen Größenordnungen, wie oben angegeben.

Die in den beiden Abb. 11 und 12 gezeigte umfangreiche Anordnung zur Spannungs-Regelung und-Symmetrierung bei Drehstrom und gleichzeitiger Frequenzregelung ist nicht die einzige Lösungsmöglichkeit. Eine etwas ältere, aber oft durchgeführte, schildert SCHÖNE [19] in der Elektropost. Das Verfahren beruht auf Angaben von R. REESE [20] und besteht darin, daß das Spannungsdreieck des den Laststrom liefernden Hauptgenerators durch einen Zusatzgenerator und drei Spannungs-Röhrenreglern stets phasengleich und amplitudenrichtig gehalten wird, und zwar unabhängig von Netzspannungsschwankungen von $\pm 10\%$, Netzfrequenzschwankungen von $\pm 1\%$ und bei unmetrischer Belastung bis zu 20% .

7. Verfahren zur Messung der geregelten Spannung.

Während für die Messung der Gleichspannung der Gleichstrom-Kompensator verwendet werden kann, ist die entsprechende Messung bei Wechselspannung erheblich schwieriger. Die Konstanz der Ausgangsspannung kann z. B. mit einer Brückenschaltung aus nichtlinearen Widerständen (Effektivwertmessung) gemessen werden [7]. Die Schaltung zeigt Abb. 13. Die beiden Zweige der Brücke sind aus je einer Kohlenfaden- und einer Metallfadenlampe aufgebaut. Eine solche Brücke ist nur bei einer bestimmten Sollspannung U_B abgeglichen, und zwar für die doppelte Spannung, die sich aus dem Schnittpunkt der beiden entgegengesetzt verlaufenden Strom-Spannungskennlinien ergibt. Eine Änderung der Brückenspannung U_B um ΔU_B bewirkt an der Diagonalspannung das Auftreten einer Spannung

$$U_D = \frac{W_M - W_K}{W_M + W_K} \cdot \Delta U_B,$$

bei mit W_M bzw. W_K als Kenngröße des vom Strom abhängigen nichtlinearen Widerstandes der Gradient $\frac{U}{I}$ des Lampenwiderstandes der Metallfaden- bzw. Kohlenfadenlampe bezeichnet ist (U = Spannungsfall an der Lampe, I = durchfließender Strom). Bei den verwendeten Lampen ist $W_M \approx 1000$ und $W_K \approx 500$, d. h. U_D beträgt etwa den dritten Teil der Änderung der Brückenspannung. Das Anzeigeinstrument für diese Diagonalspannung, das eine hohe Spannungsempfindlichkeit besitzt, wird durch ein Verhältnisinstrument eingemessen. Da wegen der verhältnismäßig geringen Ausgangsleistung des Netzanlagegerätes die zusätzliche Belastung durch die Brücke nur sehr klein sein darf, wurde die Brückenordnung so ausgelegt, daß sie nur etwa 1 VA verbräucht.

Hat man größere Ausgangsleistungen zur Verfügung, wie z. B. bei der Prüfung der Spannungskonstanz von geregelten Wechselspannungsgeneratoren, dann kann die Brücke aus einer Reihenschaltung eines linearen und eines nichtlinearen Widerstandes (Eisenwasserstoffwiderstand) in je einem Brückenweig aufgebaut werden. Sie verbraucht bei der höchsten Betriebsspannung 380 V weniger als 50 VA. Bei dieser Anordnung bewirkt eine Änderung der Brückenspannung um 1% einen Ausschlag am Anzeigeinstrument um 10 Skalenteile, so daß die Genauigkeit der Spannung auf 0,1% mit Sicherheit angegeben werden kann.

Über die Verwendung nichtlinearer Brücken zur Messung der Regelabweichung hat W. Boos [21] eingehende theoretische Überlegungen angestellt.

SCHRADER verwendet in einer Wechselstrombrücke indirekt geheizte NTC-Widerstände (Firma Philips) als nichtlineare Widerstände [22]. Jede Differenz der Heizströme (Gleich- oder Wechselströme) der beiden NTC-

Widerstände bedeutet eine Störung des Brückengleichgewichtes, wenn die Brücke vorher bei Reihenschaltung beider Heizleiter abgeglichen war. Mit einem Lichtmarkengalvanometer von 130Ω Innenwiderstand und einer Stromempfindlichkeit von $0,0353 \mu A$ je Teilstrich wurde eine Empfindlichkeit von ± 10 Skalenteilen Galvanometerausschlag erreicht, wobei die Differenz der beiden Heizströme $\pm 0,1\%$ betrug.

Bei einem anderen Verfahren zur Messung kleiner Spannungsänderungen, das den in [13, S. 158] beschriebenen magnetischen Verstärker abwandelt, werden die zu messenden Spannungsschwankungen zur Vormagnetisierung zweier Drosseln mit Nickel-Eisenblechen benutzt und zwar so, daß die durch eine weitere Gleichstromwicklung bewirkte konstante Vormagnetisierung in der einen Drossel verstärkt und in der anderen geschwächt wird (Abb. 14). Im Wechselstromkreis ändert sich dementsprechend der Wechselstromwiderstand der beiden dort in Serie liegenden Drosseln, so daß an den Sekundärwicklungen eines Ausgangs-Differentialtransformators mit Hilfe eines hochohmigen Spannungsmessers bei optimaler Anpassung schon kleinste Spannungsänderungen abgelesen werden können. Vorversuche mit Drosseln, die normales legiertes Blech enthielten, ergaben befriedigende Ergebnisse.

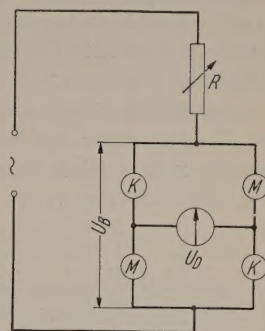


Abb. 13. Brücke zur Messung der Spannungskonstanz. U_B Brückenspannung; U_D Diagonalspannung; R Vorwiderstand; K Kohlenfadenlampe; M Metallfadenlampe

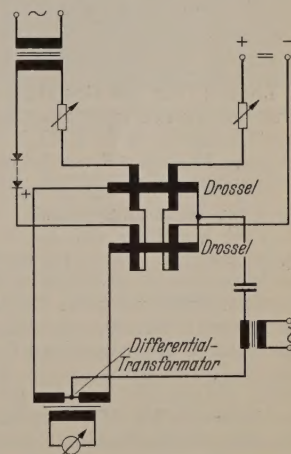


Abb. 14. Verfahren zur Messung kleiner Spannungsänderungen mit gleichstromvormagnetisierten Drosseln.

Zusammenfassung.

Ausgehend von der elektronischen Gleichspannungs-Stabilisierung, die als Ersatz für die Spannungsbatterie z. B. bei Messungen mit dem Gleichstrom-Kompensator gedacht ist, werden weitere Verfahren und Geräte zur Gleich- und Wechselspannungs-Konstanthaltung geschildert. Schaltungen mit reinen Glimmstrecken-Stabilisierungen sowie mit zusätzlicher Röhrenautomatik und auf lichtelektrischer Basis beruhende Verfahren, werden erwähnt und z. T. kritisch untersucht.

Über die heute vorhandenen Spannungsregelungseinrichtungen in Drehstrom-Maschinensätzen für Präzisionsmeßzwecke wird an Hand von Prinzip- und Block-Schaltbildern berichtet. Meßergebnisse werden mitgeteilt.

Abschließend werden Verfahren zur Bestimmung der Konstanz von stabilisierten bzw. geregelten Spannungen z. B. mittels Brückenschaltungen von linearen und nichtlinearen Widerständen erläutert.

Literatur. [1] LINDENHOVIUS, R.: Philips Techn. Rundschau S. 54 (1941). KUSSEL, V.: Elektrotechn. 1, 95 (1944). LAUDE, F.: Elektro-Anzeiger 267 (1952). DEIKE, S.: Radio mentor 18, 598 (1952). HUNT, F. V. and R. W. HICKMANN: Rev. Sci. Instr. 10, 6 (1939); Electronic Instruments Radiation

Laboratory Series, Mc. Graw Hill (1948). ELMORE, W. C. and SANDS: Electronics. McGraw Hill (1949). BENSON, F.: Electronic. Eng. 21, 200 und 243 (1949). — [2] HARTEL, ETZ-A 73, 769 (1952). BRAUNERSEUTHER E. und W. HART: Siemens-Zeitschrift 28, 51 (1954). — [3] LE BLAN, L.: Repu. Franc. Lab. D' Essais l'Académie des Sciences 224, 643 (19—). — [4] LAUDE, F.: Funktechnik 8, 88 (1953). — [5] HELM E.: ETZ-A 73, 458 (1952). — [6] HELKE, H.: ETZ 71, (1950) und Elektrotechnik 4, 119 (1950). — [7] HELKE, ETZ-A 75, 11 (1954). — [8] HELKE, H.: Regelungstechnik 134 (1953). — [9] AEG-Mitteilung erscheint demnächst. [10] HIBBARD, L. U. and D. E. CARO: J. scientific instruments. 30, 378 (1953). — [11] BECK, E.: ETZ 63, 57 (1942). [12] GRÖNINGER, K. G.: Neue Züricher Zeitung Nr. 2 (1948). — [13] STENZEL, R.: Z. angew. Phys. 5, 148 (1953). [14] OPPELT, W.: Kleines Handbuch technischer Regelgänge, Verlag Chemie (1954), S. 215. — [15] LUDWIG, E.: Siemens-Zeitschr. 21, 61 (1941). GROSZHANS, H. und W. Z. MEGEDE: Siemens-Zeitschr. 26, 305 (1952). HÜBNER, Bulletin, d. schweiz. elektrotechn. Vereins 44, 560 (1953). [16] BURISCH, N. und E. H. LUDWIG: Siemens-Zeitschr. 85 (1942). FÖRSTER, J.: ETZ 73, 202 (1952). — [17] KAP W.: Siemens-Zeitschr. 27, 62 (1953). — [18] AEG-Mitteilu 4, 100 (1953). — [19] SCHÖNE, E.: Elektro-Post 5, 188 (195—). — [20] REESE, R.: Konstanthaltung und Symmetrierung v Drehstrom-Drei- und Vierleiter-Spannungssystemen. ETZ 1069 und 1095 (1935). — [21] BOOS, W.: Diss. 1952/313 T. Stuttgart. — [22] SCHRADER, H. J.: ETZ-A 73, 547 (195

Dr. HARALD HELKE u. Dr.-Ing. RUDOLF STENZEL,
Physikalisch-Technische Bundesanstalt, Institut Berlin
Berlin-Charlottenburg 2, Abbestr. 2—12.

Buchbesprechungen.

Ludwig, G.: Die Grundlagen der Quantenmechanik. (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band LXX.) Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954. 460 S. u. 52 Abb. Ganzl. DM 52.60.

Seit mehreren Jahren sind die „Mathematischen Grundlagen der Quantenmechanik“ von J. v. NEUMANN vergriffen. Es ist zu begrüßen, daß das neue Buch von G. LUDWIG diese Lücke ausfüllt. Damit ist wieder ein Werk auf dem Büchermarkt, das eine mathematisch wohl begründete Darstellung der Quantentheorie gibt. Der Autor schält zunächst induktiv die formalen Struktureigenschaften heraus, die dem anschaulich nicht zu vereinbarenden Teilchen- und Wellenbild gemeinsam sind. Der Schwerpunkt des Buches liegt jedoch ganz auf einem deduktiven Aufbau der Quantenmechanik und deren Beschreibung im HILBERT-Raum durch Darstellungs- und Transformationstheorie. Eine ausführliche Behandlung findet auch die Problematik des Meßprozesses und die Bedeutung von Komplementarität und Determinismus. Nach diesen ausgezeichneten allgemeinen quantentheoretischen Überlegungen wird eine eingehende Behandlung von Ein- und Mehrerelektronenspektren auf gruppentheoretischer Basis gegeben. Bei der Einführung des Spins vermißt man vielleicht einen Hinweis auf die DIRACsche Gleichung des Elektrons. Im Anhang des Buches befindet sich eine Zusammenfassung der Theorie des HILBERT-Raumes mit der der meßbaren Funktionen, sowie der Gruppen und ihrer Darstellungen. Für ein erfolgreiches Studium, das nicht an mathematischen Schwierigkeiten

scheitern soll, sind jedoch einige Vorkenntnisse auf diesen Gebieten erforderlich. Andererseits ermöglichen gerade die Hilfsmittel die Quantenmechanik als ein in sich geschlossenes und widerspruchsfreies System zu erkennen.

Wer ein vertieftes Verständnis der Quantentheorie sucht wird in dem schönen, wenn auch nicht immer leicht lesenden Werk von G. LUDWIG einen vorzüglichen Fund finden
E. FICK

Eck, Bruno: Technische Strömungslehre. 4. verb. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1954. 422 S. 407 Abb. Geb. DM 29.40.

Der Charakter des Buches, über dessen 3. Auflage vom R. früher an dieser Stelle ausführlich berichtet wurde, hat durch die Neuauflage keine Änderung erfahren. Sie wurde, wie im Vergleich mit jener im einzelnen zeigt, u. a. durch die Annahme jeweils einer kurzen Behandlung folgender kleiner Punkte ergänzt und erweitert:

Mittelpunkt des statischen Flüssigkeitsdruckes, Stabilität schwimmender Körper, Druckunterschiede durch Gasaustritt, Dicke des Wirbelkernes, Rauigkeitsfunktion, Umschlag und Instabilität bei gekrümmten Flächen, Laminarprofile, Entstehung der Turbulenz, Verbrennung in schwingenden Gasäulen nach SCHMIDT, RANQUE-Wirbelrohr, Beeinflussung der Grenzschicht durch Verdichtungsstöße, Pfeilflügel, Vorgänge in der Nähe der Schallgeschwindigkeit, Geschwindigkeitsmessung nach Nickel.
H. STEFANIAR.